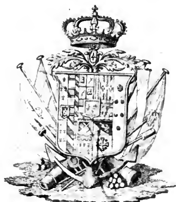
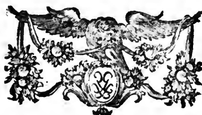
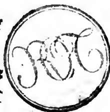


ELEMENTI
DI PERSPETTIVA
SECONDO LI PRINCIPII
DI BROOK TAYLOR
CON VARIE AGGIUNTE
SPETTANTI ALL'OTTICA,
E ALLA GEOMETRIA

DEL PADRE

FRANCESCO JACQUIER
DELL' ORDINE DE' MINIMI
LETTORE DI FISICA NELL'UNIVERSITA'
DELLA SAPIENZA.

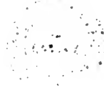



IN ROMA MDCCLV.

PER GENEROSO SALOMONI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.







All' Emo, e Rmo Principe

GIOACCHINO

CARDINAL PORTOCARRERO

FR. FRANCESCO JACQUIER.



OGLIONO gli Autori nel dedicare le loro opere a qualche illuſtre perſonaggio, implorare con lungo diſcorſo la protezione del loro Mecenate. Io perſuaſo e convinto della bontà, e

a 2 quaſi

quaſi ardirei dirlo, dell'amicizia che ha verſo di me Vostra Eminenza, ſtimerei inutile il domandare con molte parole un favore, che io già ſono ben ſicuro di avere ottenuto. Ma ſe foſſe neceſſario di richiedere a Vostra Eminenza con maggiore premura una tale grazia, io ſarei nel caſo di rappreſentarle, come queſta mia opera è ſtata intrapreſa di ſuo conſiglio, e per così dire, nata nella ſua caſa. Io conterò ſempre tra i momenti li più fortunati, e li più glorioſi della mia vita quel poco tempo avan-

zato

zato da graviſſimi affari, che VOSTRA EMINENZA ſi degna impiegare meco a diſcorrere de' ſuoi antichi ſtudj Matematici: io dico *meco*, riguardando come un'altro me ſteſſo il mio Collega ugualmente favorito da VOSTRA EMINENZA. Da queſte fortunatiſſime converſazioni ha avuto la ſua illuſtre origine il preſente libro, il quale perciò ſi trova in poſſeſſo di un diritto quaſi naturale alla protezione di VOSTRA EMINENZA. Nè mi debbo dilungare, ſiccome nelle dedicatorie coſtumar ſi ſuole, a celebrare le

Voſtre virtù . Chi evvi mai che non ſappia , che voi ſiete forſe quel ſolo , il quale ſia ſtato occupato in tanti ardui , e tanto fra loro diverſi impieghi con uguale ſucceſſo ed univerſale approvazione ? Chi non ſa , che ora applicato ai doveri d'un privato cavaliere vi ornaſte la mente di quelle Scienze , che a quel grado più convenevoli ſono ; ora chiamato a diverſi Miniſteri , e a militari comandi , e finalmente alle prime dignità della Chieſa , ſapeſte ſempre accoppiare le qualità di tanti ſtati differenti ? Parla

tutto

tutto il Mondo delle eccellenti prerogative, di cui ſiete fornito, eſſendo il Voſtro Palazzo l'aſilo non ſolo di una nazione, ma di tutte quelle, che allettate dalla fama del Voſtro merito vengono più da vicino ad ammirare le Voſtre virtù; ed avendo ancor'io la ben'avventurata ſorte di eſſerne teſtimonio oculato, ardiſco preſentare a VOSTRA EMINENZA queſto debole ſaggio della mia gratitudine, della mia ſtima, e di quella venerazione, colla quale mi proteſto.

QUantum voluptatis atque admirationis cæperim, cum legerem Elementa Perſpectivæ una cum variis ad Geometriam, atque Opticam ſpectantibus additamentis, quæ celeberrimus, ac doctiſſimus P. Franciſcus Jacquier ſuo plane more conſcripſit, quiſque facile intelliget, qui eundem librum diligenter pervolverit; ſummam enim doctrinam, ingeniique vim incredibilem, qua tot maximæ res, atque utiliſſimæ & acutè detectæ, & plane, perſpicueque demonſtratæ ſunt, ſe inveniſſe lætabitur, quicumque in optimis hujuſmodi ſtudiis maxima cupit cum fruge verſari. Satisfactum profecto hic eſt tam doctiſſimis Viris, qui ſublimiora tantummodo his in rebus exquirunt, quam iis etiam, qui mediocrem adhuc dederunt eiſdem operam. Itaque bonam, electamque legentium copiam non defuturam jure poſſum ominari, mihique amiciſſimo Scriptori eam gloriam, in cujus jam dudum poſſeſſione eſt, auctam maxime, ac cumulatam gratulari.

Benedictus Stay in Arch. Rom. Eloquentiæ Profeſſor.

IMPRIMATUR,

Si iis, ad quos pertinet ita videbitur.

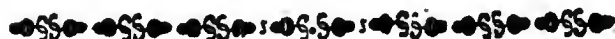
Nicolaus Maria de Vecchis Arch. Rom. Rector.

IM-

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sac. Pal. Apost.

F. M. de Rubeis Patriarcha Constantinop. Vicesg.



PER ordine del Reverendissimo Padre Maestro del Sagro Palazzo ho letto il libro intitolato *Elementi di Perspettiva &c.* composto dal M. R. P. Francesco Jacquier, nel quale nulla ho ritrovato di contrario alla Fede Cattolica; anzi per tutto vi ho ammirato un ordine naturalissimo, congiunto con una mirabile chiarezza (per quanto comporta l'indole dell'argumento), & una somma penetrazione del Chiarissimo Autore in simil materia. Perlochè lo giudico degnissimo delle stampe.

Dal nostro Convento di S. Maria sopra Minerva questo dì 21. Maggio 1755.

F. G. B. Audifredi Bibliotecario Casanatense.



IMPRIMATUR.

Fr. Vincentius Eléna Mag. Socius Rmi P. Magistri Sac. Pal. Apost. Ord. Prædic.

Con

CON ſommo mio piacere ho letto tanto il trattato ſugoſo della Perſpettiva, quanto la copioſa, e comprenſiva Appendice, che vi ha aggiunta il dottiſſimo P. Jacquier, uomo così rinomato ovunque ſon conoſciute le lettere. Vi ſi vede generalmente quella penetrazione profonda, quella vaſta erudizione, quella perizia nel Calcolo, e nella Geometria la più ſublime, felicità nel ritrovare, chiarezza nel dimoſtrare, preciſione nell' eſprimere, che già da tanto tempo gli hanno aſſicurato nella letteraria republica uno de' primi poſti. Il merito, e la giuſtizia da me richiedono queſto publico atteſtato dell' interno mio ſentimento, aſſai più, che la ſtretta amicizia, che ci congiunge.

Ruggiero Giuſeppe Boſcovich
della Compagnia di Gesù.

PRE-

PREFAZIONE.



Anti *sono li trattati di Perspettiva già dati alle stampe che potrebbe comparire ad alcuni affatto superflua questa nova opera. Non vi è forse nessuna parte di Matematica, che sia stata più trattata dalli teorici, e meno ben eseguita dalli pratici. Gli elementi di Geometria tanto necessarj nelle arti sono ignorati, anzi disprezzati dalla maggior parte degli artisti medesimi. Con tutto ciò non si deve credere, che un Geometra ben versato nella teorìa della Perspettiva sia perciò capace di eseguire un disegno con eleganza, e secondo le più esatte regole dell'arte. Si vuole oltre la teoria una certa facilità di mano, e di disegno, la quale non si può acquistare, che coll'esercizio. Onde si vede quanto sia ridicola questa obiezione di alcuni, i quali con questo sofisma si credono liberati dallo studio della Geometria. Nè si può opporre, che vi sono tanti eccellenti autori di Perspettiva pratica senza ajuto della Geometria,*

tria. Io lodo moltiſſimo queſti libri, e ſe non correggono tutti gli errori, almeno ne correggono molti; ma accadono infiniti caſi nella Perſpettiva, i quali non ſi poſſono tutti deſcrivere, e ſpiegare in un libro; un uomo verſato nella teoria li comprenderà tutti, e ſaprà ridurli in eſecuzione.

L'univerſalità, e la brevità delli principj, tra molti trattati di Perſpettiva giuntimi alle mani, mi ha fatto ſempre preferire la Perſpettiva lineare del dottiſſimo Geometra Brook Taylor, il quale ha conſiderato li diverſi problemi nella loro maggiore eſtenſione ſenza alcuna limitazione, e determinazione de' piani. Non ſi deve fare menzione del celebre Brook Taylor ſenza gli elogj dovuti a uno delli più profondi Matematici di queſto ſecolo, e delli ſecoli precedenti. Il libro eccellente intitolato: Methodus incrementorum, è un opera lodata da pochi, non perchè non ſia degna di tutta la lode, ma perchè è inteſa da pochiſſimi, tanto ſono ſublimi, e difficili le coſe delle quali tratta. Onde, ſenza volere far torto ad alcuno, devo avviſare chi non

cono-

conosce il nostro Autore di non confonderlo con altri, che portano l'istesso gran nome.

Il trattato di Perspettiva del medesimo Autore, benchè in un grado molto inferiore, è uno di quelli libri elementari che dimostrano un grand' uomo; anche nelle cose piccole si conosce sempre un grand' ingegno. Io dunque persuaso del preggio di questo metodo nel trattare la Perspettiva, ho creduto fare una cosa utilissima col publicare questi elementi, mostrandone l'utilità in una copiosa Appendice, anche nelle parti le più sublimi di matematica. Questo trattato è come diviso in due parti; la prima affatto elementare sarà facilissima a quelli, che intendono la dottrina delle proporzioni. L'Appendice, che potrebbe chiamarsi seconda parte, contiene cose più difficili, e trattate con somma brevità, essendomi proposto solamente di far vedere con poche parole l'applicazione della Perspettiva ad altre materie più sublimi.

Essendo già stampata una gran parte di questo trattato, il Signor Calandrini dottissimo Professore di Matematica mi

man-

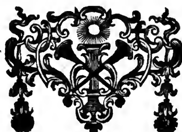
mandò un libro ſull'iſteſſa materia, del quale, tempo fa, mi aveva ſcritto l'Autore medeſimo il Signor Murdock celebre Geometra. Il detto libro in poche pagine contiene belliſſime coſe, le quali anche ſi ricavano dalli noſtri principj. Ne poſſo mancare alla mia intima amicizia, e ſingolare venerazione verſo un Geometra inſigne il Signor Clairaut, il quale nelle memorie dell'Academia di Parigi nell'anno 1731. ha trattato colla ſua ſolita eleganza il Problema 2. del num. v.

Gli uomini ſtudioſi di queſto piccolo libro non ci troveranno figure ben diſegnate, delle quali ſogliono eſſere pieni li trattati volgari di Perſpettiva più per ſodisfazione degli occhj, e guadagno delli Libraj, che per inſtruzione della mente. Io ſono perſuaſiſſimo, che coll'ajuto di pochi precetti ben inteſi, e coll'eſercizio della ſola Perſpettiva lineare ſi poſſa arrivare ad una perfetta cognizione di queſt'arte; e queſta cognizione acquiſtata per gradi, e non tutta in un ſubito, deve eſſere il fine di tutti gli elementi.

Rimane ora che io mi diſcolpi, ſe eſſendo foreſtiere ho avuto l'ardire di ſcrivere

vere

vere in una lingua a me poco familiare. Faranno le mie ſcuſe molti uomini poco intelligenti di lingua latina, per li quali principalmente è ſcritta la prima parte di queſta opera. Mi ſcuſa ancora la lingua della Geometria tanto facile, e, per così dire, univerſale, che io non devo in queſta ſorte di materia incorrere la taccia di temerità, che avrei meritata ſcrivendo in altro genere.



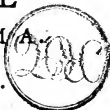
PER-





PERSPETTIVA LINEARE

PARTE PRIMA.



DEFINIZIONI.

Def. 1. LA perſpettiva lineare è l'arte di rappreſentare con eſattezza ſopra un piano un' oggetto qualunque.

Per formarſi un'idea chiara, e diſtinta delli principj di queſt'arte, ſi deve conſiderare una pittura perfetta, come l'oggetto medeſimo ſituato nel luogo proprio, talmente che lo ſpettatore non poſſa, o almeno difficilmente, diſtinguere la pittura dall'oggetto vero. A queſto effetto è neceſſario, che i raggi di luce vengano all'occhio dello ſpettatore da tutte le parti della pittura colle medeſime circoſtanze di direzione, di luce, di ombra, e di colori, come ſarebbero

bero venendo dalle parti corrifpondenti dell'oggetto fteffo.

Sia O l'occhio dello fpettatore (*fig.* 1.) diretto verfo il cubo *abcde*, del quale l'originale fia ABCDE; la luce partendo da un punto qualunque, *a*, della pittura, deve percuotere l'occhio dello fpettatore fecondo la medefima direzione, colla medefima forza di luce, e ombra come farebbe venendo dal punto corrifpondente A dell'originale, fecondo il raggio AO. Quefte tre circoftanze coftituifcono le tre parti della pittura. Primo il difegno, che confifte nella pofizione, e confeguentemente nelle forme delle figure dipinte; il che ben'efeguito fecondo le regole di matematica e non per pura prattica, o come fi fuole dire, colle dita e coll'occhio, forma l'arte della perfpettiva. Secondo il colorito. Terzo l'arte della luce e delle ombre, chiamata volgarmente *chiaro ofcuro*. Li principj di quefte tre parti, ma particolarmente quelli della perfpettiva dipendono dalla precedente rifleffione; e fopra di effa ftabilirò tutte le feguenti dimoftrazioni.

Def. 2. Se le linee tirate fecondo una certa legge dalle differenti parti d'una figura qualunque, incontrano un piano, nel quale defcrivano una figura, la figura così difegnata fi chiama *projezione* della prima figura. Le linee che producono quefte projezioni, prefe infieme fono chiamate *fiftema dei raggi*, e fe quefti raggi paffano tutti per un medefimo punto, fi chiamano *cono dei raggi*, il quale cono viene chiamato *cono*

no ottico, se il detto punto sia l'occhio dello spettatore.

*Def.*3. Se il sistema delli raggi è tale, che vengano tutti paralleli tra di loro, e perpendicolari all'orizonte, e che di più la projezione sia fatta in un piano parallelo all'orizonte, questa projezione si chiama *iconografia* della figura proposta. Sia il piano GHIK (*fig.*2.) parallelo all'orizonte, e i raggi A*a*, B*b*, C*c* venendo da diversi punti dell'ottaedro ABCDEF, sieno perpendicolari all'orizonte, e paralleli tra di loro, la projezione *abcde*, formata dalli medesimi raggi è chiamata iconografia della figura ABCDEF.

*Def.*4. Se il sistema delli raggi è tale, che sieno paralleli tra di loro, e all'orizonte, e che di più la projezione si faccia in un piano perpendicolare a questi raggi, e all'orizonte. La detta projezione si chiama *ortografia* della figura proposta. Li raggi A*a*, B*b*, C*c* &c. (*fig.*2.) essendo paralleli all'orizonte e tra di loro, di più il piano GHLM della projezione essendo perpendicolare alli raggi, *abcdef* è l'ortografia della figura ABCDEF.

Queste sono le definizioni volgari delle parole iconografia, e ortografia. Ma io devo avvertire, che in questo trattato mi allontanerò dalle definizioni generalmente ricevute, adoprando questi due termini per significare due projezioni qualunque formate da' sistemi di raggi paralleli, essendo i medesimi sistemi perpendicolari tra di loro, e alli piani di projezione, come nella figura presente, senza considerare in alcuna maniera

la loro relazione coll'orizonte. In queſta ſpecie di projezione chiamerò la projezione di un punto, o d'una linea, la *poſizione* del punto, o della linea nel piano di projezione. Per eſempio, *a*, è la poſizione del punto A nel piano GHIK, e *ae* è la poſizione della linea AE nel piano GHLM.

*Def.*5. Se la projezione è formata da un cono di raggi, viene chiamata *ſcenografia*. Per eſempio (*fig.*7.) la figura *abcde*, ſegnata nel piano FGHI, dal paſſaggio dei raggi AO, BO, CO &c. che partono da diverſi punti del cubo ABCDE, e che convengono in O, ſi chiama la ſcenografia della figura ABCDE. Queſta projezione è la perſpettiva della figura reſpettivamente all'occhio poſto in O, come ſarà dimoſtrato in appreſſo. E' evidente, che queſta iſteſſa projezione viene prodotta dalle ombre delle figure, conſiderando il corpo luminoſo come un punto; abbenchè nel caſo del Sole, e della Luna, queſto punto eſſendo a una diſtanza infinita per riguardo alli noſtri ſenſi, li raggi ſieno ſiſicamente paralleli. Il gran Nevvtono ha indicato in poche parole tutta la teoria delle ombre, ma la materia eſſendo ſublime non deve aver luogo in queſti elementi di perſpettiva fatti anche per quelli, che non ſanno più della Geometria commune. Onde ſarà meglio di ſpiegare queſta bella e difficile dottrina in una delle Appendici che aggiungerò a queſto trattato.

*Def.*6. Il *punto di veduta* ſi chiama quel punto, nel quale è poſto l'occhio dello ſpettatore. Queſto punto è la ſommità del cono ottico, come ſarà

farà evidente dal teorema 2., nel quale si dimostrerà, che la perspettiva d' un óggetto qualunque è la projezione scenografica del medesimo.

*Def.*7. Se dal punto di veduta si tira una perpendicolare al quadro, il punto in cui la detta linea incontra il quadro è chiamato il *centro* del quadro; la distanza tra questo centro ed il punto di veduta viene chiamata *distanza* del quadro.

*Def.*8. Se per il punto di veduta si concepisce un piano parallelo al quadro, questo piano è chiamato *piano dirigente*.

*Def.*9. Per oggetto *originale*, o sia punto, o linea, o superficie, o solido s'intende l'oggetto reale da ridursi in perspettiva.

*Def.*10. Per piano *originale* s'intende il piano nel quale è posto l'oggetto originale, o sia punto, o linea, o figura piana.

*Def.*11. Il punto, in cui una linea originale qualunque, prolungata se sia necessario, incontra il quadro, è chiamato *interfezione* della linea.

*Def.*12. L'interfezione commune d'un piano originale qualunque, e del quadro è chiamata semplicemente *interfezione*.

*Def.*13. Il punto, in cui una linea originale qualunque incontra il piano dirigente, è chiamato il *punto dirigente* della linea originale; e la linea condotta dal punto dirigente al punto di veduta è chiamata *direttrice* della linea originale.

*Def.*14. La commune interfezione d'un piano originale qualunque, e del piano dirigente è chiamata *linea dirigente* del piano originale.

Def. 15. Una linea condotta dal punto di veduta, parallela ad una linea originale qualunque, è chiamata femplicemente *parallela* della medefima linea originale.

Def. 16. Un piano, che paffa per il punto di veduta, ed è parallelo ad un piano originale qualunque, viene chiamato femplicemente *parallelo* del medefimo piano originale.

Def. 17. Il punto, in cui la parallela d'una linea originale incontra il quadro, è chiamato punto *evanefcente* della medefima linea, e la diftanza tra quefto punto evanefcente, ed il punto di veduta è chiamata femplicemente *diftanza* del punto evanefcente.

Def. 18. La linea, in cui il parallelo d'un piano originale qualunque taglia il quadro, è chiamata linea *evanefcente* del medefimo piano; e fe dal punto di veduta fi conduca una linea che incontri la detta linea evanefcente ad angoli retti, il punto ove cade la perpendicolare fi chiama *centro* della medefima linea. La diftanza tra il detto centro, e il punto di veduta è chiamata femplicemente *diftanza* della medefima linea evanefcente.

Def. 19. La perfpettiva d'una figura qualunque fi dice *projezione* della medefima.

Per formarfi un' idea chiara delle precedenti definizioni il lettore deve immaginarfi, che il piano ABC (*fig.* 3.) fia il piano del quadro, O il punto di veduta (*Def.* 6.) ODE il piano dirigente parallelo al quadro (*Def.* 8.), FG una linea originale

nale (*Def*.9.) nel piano originale FGH (*Def*.10.), il quale taglia il quadro in BI, ed il piano dirigente in DE. Sia OAC un piano parallelo al piano originale FGH, e del quale la commune interfezione col quadro fia la retta AC. Sia la linea OV parallela alla linea originale FG, ed incontri il quadro in V. FG incontri il quadro in B, ed il piano dirigente in D. Suppofte tutte quefte cofe, B è l'interfezione della linea originale FG (*Def*.1.), D il fuo punto dirigente (*Def*.13.), V il fuo punto evanefcente (*Def*.17.), OD la fua direttrice (*Def*. 13.), OV diftanza del punto evanefente V (*Def*.17.), BI è l'interfezione (*Def*.2.), DE la linea dirigente (*Def*.14.), OAC il parallelo (*Def*.16.), AC la linea evanefcente (*Def*.18.) del piano originale FGH. Se fi condurrà la linea OS perpendicolare alla linea evanfcente AC in S, il punto S farà il centro, e SO farà la diftanza della linea evanefcente AC (per' iftefsa definizione.)

Afioma 1. La commune interfezione di due piani è una linea retta.

Afioma 2. Se due linee fi tagliano in un punto, o fono tra di loro parallele, fi potrà far paffar un piano per ambedue le linee.

Afioma 3. Se tre linee rette fi tagliano vicendevolmente, o fe due di loro effendo parallele vengono tagliate da una terza, faranno tutte tre nel medefimo piano, cioè un piano, che paffa per due li loro, pafferà ancora per la terza.

Assioma 4. Ogni punto di una linea retta sta nel piano della medesima retta.

Lemma 1. Se BSO, e AEBD (*fig.*4.) sieno due piani, i quali si taglino ambedui nella retta ASB, e che da un punto qualunque O l'uno di questi piani si conducano due linee, delle quali una OS sia perpendicolare alla retta AB in G, e l'altra OC incontri il piano AEBD ad angoli retti in C, condotta la retta CS, sarà perpendicolare ad ASB.

La dimostrazione di questo lemma si ricava facilmente dalla proposizione 2. del libro XI. degli Elementi. Imperocchè nella linea ASB si concepiscano due punti A, B ugualmente distanti da S, la linea OS essendo perpendicolare al AB, il punto O sarà ugualmente distante da BA. Onde saranno uguali le rette OA, OB. Di più immaginandosi le rette CB, CA, si avranno li triangoli rettangoli OCB, OCA, nelli quali saranno uguali i lati CB, CA (*prop*.47. *lib*. 1.), e perconseguenza il punto C essendo ugualmente distante dalli punti B, A ugualmente distanti da S, sarà CS perpendicolare ad ASB.

TEOR. I.

Una linea condotta dal centro del quadro al centro della linea evanescente è perpendicolare alla detta linea evanescente.

DIM.

DIM.

Sia AEBD (*fig.4.*) il piano del quadro, O il punto di veduta, OSB il piano parallelo, del quale la commune interſezione col quadro è la linea evaneſcente ASB. Sia S il centro della detta linea, e, C il centro del quadro. Condotte OS, e OC ſi uniſcano i punti C, S colla retta CS, ſarà OS perpendicolare ad AS (*Def.* 18.), ed OC perpendicolare al piano AEBD (*Def.* 7.). Onde CS è perpendicolare ad AS (*Lem.* 1.).

Cor. La diſtanza OS d'una linea evaneſcente qualunque ASB, è l'ipotenuſa d'un triangolo rettangolo, del quale i lati ſono la diſtanza del quadro OC, e la diſtanza CS tra il centro della linea evaneſcente, ed il centro del quadro.

TEOR. II.

La perſpettiva, o projezione d'un oggetto qualunque è la projezione ſcenografica dell'iſteſſo oggetto ſul piano del quadro, ed il punto di veduta è la ſommità del cono ottico.

DIM.

La luce deve arrivare all'occhio O dello ſpettatore (*fig.* 1.) da un punto qualunque *a* della perſpettiva, come farebbe dal punto corriſpondente A dell'oggetto originale (*Def.* 1.). Onde è evi-

evidente, che li raggi *a*O, AO sono nella medesima retta; e per conseguenza il raggio AO passa per il punto *a* del quadro, e tutta la projezione *abcde* è la projezione scenografica della figura originale ABCDE, il cono ottico essendo OABCDE, del quale la sommità è il punto di veduta O.

Cor. 1. la projezione d'una linea retta è una linea retta; imperocchè il cono ottico ODE, che produce la projezione *de* d'una linea qualunque DE, diventa la superficie del triangolo piano ODE, tutti i raggi, che vengono al punto O dalli differenti punti della linea DE, essendo nel piano, che passa per le linee DO, e EO. Onde *de* è l'interfezione del quadro col triangolo ODE, e conseguentemente la detta interfezione è una linea retta (*Ass.* 1.).

Cor. 2. L'originale della projezione può essere un'altro oggetto qualunque, che produrrebbe l'istesso cono di raggi. Per esempio, l'originale della projezione *de* può essere un altra retta *de*, che produrrebbe il cono ottico ODE, come viene prodotto dalla DE.

Si può domandare con ragione, perchè le figure rappresentate in un quadro compariscono essere l'oggetto medesimo, che rappresentano. Si potrebbe rispondere, che la mente nostra à acquistato l'uso di giudicare delli oggetti, che hanno certe relazioni di luce, d'ombra, di forma, e di situazione. Tutte queste circostanze sono necessarie alla perfezione del quadro; benchè un semplice disegno sia alcune volte quasi bastante per

per esprimere la relazione delle parti, come si osserva in un pavimento, nel quale le pietre compariscono quadrate, benchè siano espresse con figure irregolarissime. Questo effetto deve attribuirsi alla relazione delle parti; imperocchè la rappresentazione di ogn'uno di questi quadrati difficilmente comparirebbe quadrata, se non vi fossero altri oggetti, i quali ce ne facessero giudicare diversamente, attesa la relazione che hanno con essi. Si potrebbero a questo proposito aggiugnere molte altre riflessioni; ma la materia è più metafisica, che matematica.

E' notissima la storia del Giovane, al quale il Chefelden fece l'operazione della cateratta. Le osservazioni sopra li primi fenomeni di questa vista nascente sono descritte nelle transazioni filosofiche *n*.402., e possono servire di spiegazione alla presente difficoltà.

TEOR. III.

La projezione d'una linea retta, che non sia parallela al quadro, passa per l'intersezione della detta linea, e per il punto evanescente.

DIM.

Sia *fg* (*fig*.3.) la projezione della linea originale FG: essendo FO, GO li raggi, che producono le projezioni *f*, *g* delli punti F, G (*Teor*.2.) sarà *fg* l'intersezione del quadro col piano del trian-

triangolo OFG. Ma tutta la linea FGB sta nel medesimo piano, e conseguentemente l'interfezione B (*Ass.*4.). Dunque la linea *fg* prolungata passa per B. Il che era da dimostrarsi in primo luogo. Essendo OV parallela ad FG (*Def.* 17.), essa giace nel piano del triangolo OFG. Onde *fg* prolungata passa per il punto V. Che era da dimostrarsi in secondo luogo. Questo teorema è il principale fondamento di tutta la perspettiva prattica, perciò il lettore deve renderselo familiare. Per maggiore facilità il senso di questo teorema è espresso nella figura 1., nella quale la projezione *bc* incontra la linea originale BC nell'interfezione K, e passa per il punto evanescente V prodotto dalla parallela OV.

Scol. Se la linea originale passa per il suo punto evanescente, tutta la projezione diventa il punto evanescente medesimo; onde in questo caso la linea svanisce; e per questo motivo pare a proposito il termine di evanescente. A questa ragione si aggiunge, che la projezione d'un oggetto tanto è più piccola, e nell'istesso tempo più vicina del punto evanescente, quanto l'oggetto è più lontano sopra una linea qualunque, e finalmente quando la projezione cade sul detto punto, svanisce la di lei grandezza, imperocchè l'oggetto originale è a una distanza infinita. Ciò si capisce facilmente rappresentandosi un'uomo che fugge da noi in una lunga camminata, esso comparisce più piccolo quanto è più distante. La ragione di questa apparenza è evi-

è evidente dalli Corollarj ſeguenti, e dalla figura prima, nella quale le linee uguali e parallele, CD, BA, poſte ſopra la medeſima retta BA, formano delle projezioni *ba*, *cd* tanto più piccole quanto queſte linee ſono più lontane, talmente che la linea eſſendo in una diſtanza infinita, il punto *a* cada in *b*, nel quale caſo la projezione ſvaniſce.

Cor. 1. Le projezioni delle linee originali che ſono parallele tra di loro, ma non al quadro, paſſano tutte per il medeſimo punto evaneſcente. Imperocchè non hanno che una medeſima parallela commune a tutte, e conſeguentemente il medeſimo punto evaneſcente. Ciò ſi vede nella figura 1. in cui la projezzione *da*, e *cb*, delle parallele DA, CB, ſi incontrano nel commune punto evaneſcente V.

Cor. 2. Il centro del quadro è il punto evaneſcente delle linee perpendicolari al quadro. (*Def.* 7. 15. 17.)

THEOR. IV.

La projezione d'una linea parallela al quadro è parallela alla linea originale.

DIM.

Sia EF il piano del quadro (fig. 5.), AB la linea originale parallela al medeſimo, e *ab* la projezione; ſuppoſto O il punto di veduta, e OAB

è OAB il cono ottico, (*theor.2.*) *ab*, è l'interfezione del quadro col piano del triangolo OAB, onde AB, effendo parallela al piano EF, farà *ab*, parallela ad AB, imperocchè ambedue le linee fono nel piano del triangolo OAB, e non s'incontrano. Poichè fe s'incontraffero la loro commune interfezione farebbe nel piano EF, e confeguentemente AB, non farebbe parallela al piano EF.

Cor. 1. Le projezioni delle linee parallele tra di loro, e al quadro, fono parallele. Per efempio *ab*, *dc*, fono parallele tra di loro, e alle linee originali AB, CD.

Cor. 2. La projezione *abcd*, d'una figura piana qualunque parallela al quadro, è fimile alla figura originale. Imperocchè conducendo la diagonale AC, e la projezione corrifpondente *ac*, li lati, *ab*, *bc*, *ac*, fono paralleli agli lati originali corrifpondenti, AB, BC, AC. Onde gli angoli in *a*, *b*, *c*, fono uguali agli angoli corrifpondenti A, B, C, e confeguentemente il triangolo *abc*, è fimile al triangolo ABC. Nell' ifteffa maniera, *acd* è fimile ad ACD, e perciò tutta la figura *abcd*, è fimile alla figura ABCD.

Cor. 3. Nel medefimo cafo, la lunghezza d'una linea qualunque *ab*, nella projezione è alla lunghezza della linea originale AB, come la diftanza del quadro è alla diftanza trà il punto di veduta e il piano della figura originale: Sia OgG, perpendicolare a quefti due piani in *g*, G,

g, G; sarà *ab*: AB = O*a* : OA = O*g* : OG (*prop.7. lib.11. elem.*) ma *g* è il centro, O*g* è la distanza del quadro, OG è la distanza tra il punto di veduta O, ed il piano originale ABCD. Onde *ab* è a AB come la distanza del quadro è alla distanza trà il punto di veduta ed il piano della figura originale.

TEOR. V.

La projezione d'una linea è parallela alla sua direttrice.

DIM.

Le linee OF, OG, OD, *fg* (*fig.3.*) sono tutte nell'istesso piano (per. la spiegazione data dopo la def.19. e per il theor.3.). Ma il piano dirigente ODE, è parallelo al piano del quadro ABIC (*def.8.*). Onde la dirrettrice OD è parallela alla projezione *fg* (*prop.16. lib.11. delli elem.*)

Cor.1. Le projezioni delle linee che hanno la medesima direttrice, sono parallele.

Cor.2. La direttrice d'una linea originale parallela al quadro, è parallela alla medesima originale, e conseguentemente questa direttrice sta in un piano parallelo al piano della linea originale; onde la linea evanescente di questo piano, e la projezione della linea sono parallele.

TEOR.

TEOR. VI.

La linea evanefcente, l'interfezione, e la linea dirigente d'un piano originale qualunque fono parallele tra di loro.

DIM.

Li piani NVC, DFH (*fig.3.*) effendo paralleli (*def.*16.) ficcome ancora li piani ODE, CAB (*def.8.*), la linea evanefcente CV, l'interfezione IB, e la linea dirigente ED fono parallele (*prop.*16. *lib.*11. *elem.*)

Cor. La diftanza *f*V tra la projezione d'un punto qualunque, ed il punto evanefcente V, fta alla diftanza BV tra l'interfezione B, ed il medefimo punto evanefcente V, come la diftanza OV di quefto punto evanefcente V, è alla diftanza DF, tra il punto dirigente, ed il punto originale F. Imperocchè OVBD, è un parallelogrammo, e perciò BV $=$ DO: di più li triangoli *f*OV, OFD, fono fimili, effendo li lati V*f*, e OD paralleli, onde *f*V : VO $=$ DO (BV) : DF.

TEOR. VII.

Li punti evanefcenti di tutte le linee in un piano originale qualunque, fono nella linea evanefcente del piano.

DIM.

DIM.

Poichè tutte le linee originali sono nell' istesso piano, le parallele a queste stesse linee che passano tutte per il medesimo punto di veduta saranno tutte in un piano parallelo (*prop.* 15. *lib.* 11. *elem.*) onde tutti li punti evanescenti sono nella linea evanescente.

Cor. 1. Li piani originali paralleli tra di loro hanno la medesima linea evanescente.

Cor. 2. Il punto evanescente della commune interfezione di due piani originali, è l'interfezione delle loro linee evanescenti. Poichè il punto evanescente della commune interfezione deve ritrovarsi nelle linee evanescenti di ambedue i piani, e per conseguenza nell'interfezione delle linee evanescenti.

Cor. 3. La linea evanescente d'un piano perpendicolare al quadro passa per il centro del quadro.

TEOR. VIII.

Le interfezioni di tutte le linee nel medesimo piano originale, sono nell'interfezione di questo piano.

Questa proposizione è evidente dalle definizioni 11. e 12.

Cor. 1. L'interfezione della commune interfezione di due piani originali, è l'interfezione

B delle

delle loro interſezioni. Poichè l'interſezione della commune interſezione deve eſſere nell'interſezione di ambedue i piani, e conſeguentemente nell'interſezione delle loro interſezioni.

*Cor.*2. Li piani delli quali la commune interſezione è parallela al quadro hanno le interſezioni parallele; imperocchè la commune interſezione eſſendo parallela al quadro non incontra mai il quadro, onde la ſua interſezione col quadro è nulla. Dunque ancora è nulla l'interſezione delle interſezioni delli piani (*Cor.*1.) cioè le dette interſezioni ſono parallele. Di più ſono parallele le linee evaneſcenti delli medeſimi piani. (*Teor.*6.)

PROBL. I.

Eſſendo dato il centro del quadro, e data anche la diſtanza, trovare la projezione d'un punto, del quale la poſizione ſul quadro, e la diſtanza ſiano date.

Sia S il centro del quadro (*fig.*6.) e, *b*, la poſizione data del punto originale. Si conduca ad arbitrio la retta SO, uguale alla diſtanza del quadro. Sia condotta *b*A, uguale alla diſtanza della poſizione data, e parallela alla SO. Tirando S*b*, e A*o*, il punto d'interſezione *a*, ſarà la projezione cercata.

DIM.

Supponiamo l'angolo OS*b*, retto, e conſeguentemente ancora l'angolo A*ba*, immaginan-

nandosi allora che li triangoli SO*a*, e *b*A*a* si rivolgano intorno alla linea S*ab*, come asse, finchè SO, e *b*A diventino perpendicolari al quadro, O sarebbe il punto di veduta, A, il punto originale, e AO, il raggio che incontra il quadro in *a*, ove sarà conseguentemente la projezione del punto A. (*teor*.2.) Ma il punto *a*, rimane l'istesso qualunque sia l'angolo OS*b*, poichè per la similitudine delli triangoli OS*a*, A*ba*, si ha sempre S*a* : *ab* = SO : *b*A, la quale proporzione non dipende dall'angolo OS*b*. Onde in tutti i casi il punto *a*, è la projezione d'un punto del quale la posizione sul quadro è *b*, e la distanza della posizione è *b*A.

Cor.1. Avendo condotta la linea S*b*, si può colla regola, e col compasso ritrovare il punto *a*, dividendo la retta, S*b*, in *a*, talmente che S*a*, sia ad *ab*, come la distanza del quadro SO sta alla distanza *b*A, della posizione del punto originale.

Cor.2. Si può con questa medesima proposizione ritrovare la projezione d'una linea qualunque, ritrovando le projezioni di due punti di questa linea, e conducendo una linea per le due projezioni trovate.

PROBL. II.

Essendo data la posizione, e l'interfezione della linea originale assieme coll'angolo, che fa l'originale colla sua posizione, essendo dato

 di

di più il centro del quadro colla diſtanza ; ritrovare la projezione della linea originale, il punto evaneſcente, la diſtanza del detto punto.

Sia DE (*fig.6.*) la poſizione data della linea propoſta, D la ſua interſezione, S il centro del quadro. Si conduca DC, la quale faccia l'angolo EDC, uguale all'angolo della linea originale colla ſua poſizione. Sia condotta SV parallela a DE, e SO perpendicolare alla SV, ed uguale alla diſtanza del quadro. Si conduca OV, parallela a DC, che tagli SV in V, e ſi tiri DV, ſara V, il punto evaneſcente, OV la ſua diſtanza, e DV la projezione indefinita della linea propoſta.

D I M.

Immaginiamo i piani OSV, CED, rivolgerſi intorno alle linee SV, DE, come aſſi, finchè diventino perpendicolari al quadro. Sarà O il punto di veduta, DC la linea originale, alla quale eſſendo OV, parallela, ſarà V, il punto evaneſcente (*Def.*17,) e conſeguentemente DV, la projezione cercata. (*teor.*3.)

*Cor.*1. Si può trovare la projezione d'una parte AC, della linea originale DAC, conducendo le linee AO, CO, come raggi viſuali che tagliano DV, in *a*, *c*. Imperocchè li punti *a*, *c*, dipendono ſolamente dal paralleliſmo delle linee OV, DC, e dalla loro proporzione: eſſendo *a*V : *a*D = VO : DA, e CV : CD = VO : DC per la ſimi-

similitudine delli triangoli aVO, aDA, e cVO, cDC. Per maggior chiarezza si potrebbe paragonare la figura 6. colla terza, nella quale li punti O, V, f, g, B, G, F corrispondono alli punti O, V, c, a, D, A, C.

*Cor.*2. Essendo ritrovata la DV, si potrà trovare la projezione c, d'un punto qualunque C, colla regola, e col compasso, facendo $cV : cD = OV : CD$.

PROBL. III.

Essendo data la projezione d'una linea col suo punto evanescente, trovare la projezione d'un punto che divide la linea originale in ragione data.

Sia AB (*fig.*7.) la projezione data, V, il punto evanescente. Si conduca ad arbitrio la retta VO, alla quale si faccia parallela ba, e per un punto qualunque O, della linea VO, si conduchino OA, e OB, che incontrino b, a, in a, e b. Si divida ab in c, nella proporzione data, e si tiri OC, la quale taglia AB in C. Sarà C la projezione cercata, l'originale di BC, essendo all'originale di CA, come bc, a ca.

DIM.

Essendo OV parallela a, ba, si può considerare ba, come la linea originale e OV come la sua parallela, e conseguentemente O, come

il punto di veduta e aO, bO, cO, come i raggi visuali, che producono la projezione delli punti A, B, C.

Cor. Poichè li triangoli BCb,OBV sono simili sarà CB; Cb = BV : OV, e $CB = \frac{BV \times Cb}{OV}$. Di più per la similitudine delli triangoli AOV, ACA, sarà AC : AV = ac : OV, e $CA = \frac{AV \times aC}{OV}$, onde sostituendo in vece di aC, Cb, le loro proporzionali ca, cb, sarà CA : $CB = \frac{AV \times ac}{OV} : \frac{VB \times cb}{OV} = AV \times ac : VB \times cb$, Perciò si potrà trovare il punto C, colla regola, e col compasso, facendo CA : CB = AV $\times$ ac : VB $\times$ cb.

PROBL. IV.

Essendo data la projezione d'una linea col suo punto evanescente, da un punto dato nella stessa projezione tagliare un segmento che sia la projezione d'una parte data dalla linea originale.

Sia AB la projezione data (*fig.*8.), V, il punto evanescente, e C, sia il punto dal quale si deve tagliare il segmento. Sia condotta ad arbitrio VO, alla quale si faccia parallela abc, e da un punto qualunque O, in VO, siano condotte OA, OB, OC. che tagliano ab, in a, b, c.

Si

Si prenda *cd*, ad, *ab*, come la parte data dell' originale è all'originale di AB, e sia condotta, O*d*, che taglierà AB in D. Sarà CD il segmento cercato.

DIM.

Se si concepisse OV, come la linea evanescente di qualche piano, che passa per l'originale di ABV, essendo *abcd* parallela alla detta linea evanescente, potrà essa considerarsi come la projezione d'una linea parallela al quadro (*Cor*.2. *Teor*.5.) Onde le parti *ab*, *cd* saranno proporzionali alle loro linee originali (*Teor*.4) Ma essendo V il punto evanescente, le originali di O*a*, O*b*, O*c*, O*d* sono parallele (*Cor*. 1. *teor*.3.) Dunque l'originale di CD sta all' originale di AB, come *cd* è a *ab*, (*prop*.2. *lib*.6. *elem*.)

Scol. Questa proposizione potrebbe dimostrarsi come la precedente, la quale può essere considerata come un caso particolare, cioè, quando il punto C, di questa proposizione coincide con uno delli punti A, B.

Cor. Si potrebbe trovare il punto D, colla regola, e col compasso: imperocchè le linee D*m*, C*s*, *qg*, *r*A essendo parallele a D*a*, si avrà la ragione di DC, a DV colle seguenti analogie DC : DV = C*m* : *mo*, ma, *mo* : D*m* = O*c* : *dc*, dunque $mo = \frac{Oc \times Dm}{dc}$; onde sarà DC :

 DV

$DV = Cm : \frac{Oc \times Dm}{dc} = Cm \times dc : Oc \times Dm$, Di più $Cm : Dm = CO : VO$, dunque $DC : DV = CO \times dc : cO \times VO = Cs \times dc : bc \times VO$, sostituendo in vece di $CO : cO$, la ragione uguale $Cs : bc$. Di più $Cs : VO = BC : BV$, dunque $DC : DV = BC \times dc : bc \times BV$. Ma $bc : qB = ob : OB$, onde $DC : DV = BC \times dc \times BO : BV \times Bq \times bO = CV \times dc \times BO : BV \times Vo \times bo$, per la similitudine delli triangoli BCq, VCO. Inoltre sono simili li triangoli bOa, BOg, onde sarà $DC : DV = CV \times dc \times Bg : BV \times VO \times ab$. Ma $Bg : VO = AB : AV$, dunque finalmente $DC : DV = CV \times dc \times AB : BV \times AV \times ab$.

PROBL. V.

Essendo dato il centro colla distanza del quadro, ritrovare la linea evanescente d'un piano del quale è data l'intersezione coll'angolo della sua inclinazione al quadro, e ritrovare ancora il centro e la distanza della linea evanescente.

Sia AB (*fig*.9.) l'intersezione data del piano, e, C, il centro del quadro. Si conduca CO, parallela ad AB, ed uguale alla distanza del quadro, e sia CA, perpendicolare ad AB. Di più si tiri OS, che tagli AC in S, talmente che l'angolo OSC sia uguale all'inclinazione del piano originale al quadro. Sia condotta SD, parallela ad AB, sarà SD, la linea evanescente cercata, S il suo centro, e OS la sua distanza.

DIM.

D I M.

Immaginiamo il triangolo OSC, alzato sopra il piano del quadro talmente che OC, sia perpendicolare al quadro, in questo caso sarà O, il punto di veduta, e SD, essendo parallela ad AB, il piano che passa per SD, e per il punto O, sarà il parallelo d' un piano originale qualunque che passa per AB, e inclinato al quadro nell'angolo OSC. Onde SD, è la linea evanescente cercata; E poichè OS, per la supposizione, è perpendicolare a SD, sarà S, il centro, SO la distanza della linea evanescente SD.

Scol. Prendendo OC, per raggio, CS è la cotangente, e OS la cosecante dell'inclinazione del piano originale al quadro.

P R O B L. VI.

Data l' interfezione d' un piano originale colla sua linea evanescente, dato il centro colla distanza della detta linea evanescente, ed avendo di più le figure originali disegnate nella loro esatta proporzione, ritrovare la projezione d'una linea qualunque nel piano originale.

Sia DF (*fig.* 10.) l'interfezione data, HG, la linea evanescente della quale il centro sia S, si conduca SO, perpendicolare a GH, e uguale alla distanza della linea evanescente GH, e si concepisca il piano originale X, abbassato sul qua-

quadro e veduto come a traverſo di uno ſpecchio.

Sia Y, il piano parallelo ſimilmente piegato ſopra il quadro; e ſia AB, la linea originale della quale ſi cerca la projezione. La retta AB, tagli l'interſezione in D, e ſia condotta OG, parallela ad AB, che tagli la linea evaneſcente in G. Si conduca DG, che ſarà la projezione indefinita di AB. Per i punti A, B, ſiano tirate ad arbitrio le rette AC, BC, le quali ſi tagliano in C, e ſi trovino nell'iſteſſo modo le loro projezioni indefinite FI, e EH le quali tagliano DG, in *a*, *b*. Sarà *ab*, la projezione determinata di AB, eſſendo *a*, la projezione delle eſtremità A, e, *b*, la projezione dell'eſtremità B.

In un' altra maniera.

Sia KL, la linea originale data, ſi ritrovi come di ſopra, la ſua projezione indefinita QG. Si conducano OK, OL, che tagliano la QG, in *k*, *l*, ſaranno li punti *k*, *l*, le projezioni delle eſtremità K, L.

In un altra maniera per mezzo della direttrice.

Sia EF (*fig.* 11.) l'interſezione data, e ſia il piano originale talmente abbaſſato ſul quadro, che la linea dirigente ſi trovi nel piano HI, eſſendo la diſtanza tra le linee AF, HI, uguale alla diſtanza della linea evaneſcente data. Sia di più il punto di veduta O, traſportato ſul quadro aſſieme col piano dirigente HOI. Si troverà la projezione indefinita d'una linea originale qualunque AB, prolungando la detta linea

nea finchè tagli EF in F, e HI in G. Tirando di poi OG e conducendo F*a*, parallela ad OG, sarà, F*a* la projezione indefinita cercata. Trovando inoltre nell'istessa maniera la projezione indefinita E*d*, d'un altra linea qualunque AD, che passa per A, l'intersezione *a* di questa projezione con F*a*, sarà la projezione di A, e si avrà nell'istessa maniera l'altro punto *b*. Ovvero queste due estremità possono ritrovarsi tirando la linea dalli punti A, B, al punto O, come nella construzione precedente.

D I M.

Si concepiscano le figure piegate (*fig.*10.) in DF, HG; e (*fig.*11.) in EF, HI, finchè il piano originale, il suo parallelo, il piano dirigente, e con essi il punto di veduta O, arrivino nel loro proprio sito. Allora il punto D (*fig.*10.) e, F, (*fig.*11.) sarà l'intersezione di AB, e, G (*fig.*11.) sarà il suo punto dirigente, ma OG (*fig.*10.) è parallela ad AB, e perciò G è il suo punto evanescente, e DG la sua projezione indefinita (*teor.*3.). F*a*, (*fig.*11.) è sempre parallela ad OG, che è la direttrice di AB; perciò F*a*, e la projezione indefinita di AB. (*teor.*5.) E evidente che *a*, trovato per l'intersezione di FI con DG (*fig.*10.), e di E*d* con F*a* (*fig.*11.) è la projezione dell'intersezione delle linee originali AB, AC (*fig.*10.) e di AB, AD (*fig.*11.) L'altra costruzione colle linee AO, è la medesima

fima che colle linee AO, CO, per ritrovare li punti *a*, *c*, nella fig. 6. come è fpiegato nel *cor.* 1. del *Probl.* 2.

Scol. 1. Il lettore poco efercitato nelle materieMatematiche potrà concepire più facilmente la maniera di trafportare il piano originale, il fuo parallelo, e il piano dirigente col punto di veduta nel piano del quadro, immaginando (*fig.* 3.) quefti piani trafportati affieme allargandofi li angoli OVB, ODB finchè quefti piani coincidano, e che il piano originale fia veduto per di dietro.

Scol. 2. Le projezioni *ad*, *kl*, fono parallele (*fig.* 11.) avendo le loro originali ambedue la medefima direttrice, conforme al *Cor.* 1, del *teor.* 5. l'ifteffo fi può offervare in *lm*, e *cd* che hanno la medefima direttrice OI.

PROBL. VII.

Effendo date le medefime cofe, come nel Problema precedente, ritrovare la projezione d'una figura qualunque.

. Si trovino le projezioni delle differenti parti della figura data come nel Problema precedente. Per efempio, la projezione *klmnp*, (*fig.* 10.) del pentagono KLMNP, fi trova in quefta maniera. Conducendo OG, OH, OI, OV parallele a KL, LM, MN, KP rifpettivamente, li punti G, H, I, V faranno i loro punti evanefcenti, e le rette KL, LM, MN effendo prolungate tagliano DR nelle interfezioni Q, R, T,

onde

onde tirando QG, RH, TI, si avranno le projezioni *l*, *m*, delli punti L, M, per la loro mutua intersezione. Tirando allora OK, e ON si avranno li punti *k*, *n*. Conducendo di più la retta KV al punto evanescente V di KP, si avrà la projezione indefinita di KP. Finalmente conducendo OP, si avrà il punto *p*. Si ritroveranno le projezioni delle figure curvilinee cercando le projezioni di diversi loro punti, e unendole insieme. Per esempio (*fig*, 13. *n*. 1.) essendo DE, l' intersezione, e VF la linea evanescente, O, il punto di veduta, e ABC, un cerchio originale posto come nel Problema precedente, la projezione *a*, d'un punto qualunque A può trovarsi conducendo ad arbitrio AD alla quale sia OV parallela. Tirando allora DV, e OA, esse s' incontrano nel punto cercato *a*, secondo la costruzione del Probl.6. D, essendo l'intersezione, e, V il punto evanescente della linea AD. Le diverse linee AD, essendo condotte tutte parallele l'una all'altra, il medesimo punto evanescente V, può servire per tutte.

Overo sia num.2. VF la linea dirigente trasportata sul quadro come nella figura 11. rimanendo tutte le altre cose come sopra, si condura ad arbitrio AD, che taglia DE e VF in D e, V, conducendo allora OV alla quale si faccia D*a*, parallela; si avrà la projezione *a*, tirando OA, che taglia D*a* in *a*. Adoperando il medesimo punto V, per tutti i punti A, tutte le linee D*a* saranno parallele tra di loro e alla stessa linea OV.

PRO-

PROBL. VIII.

Ritrovare la projezione d'una figura qualunque in un piano parallelo al quadro.

La projezione essendo simile all' originale (*cor.2. teor.4.*) si fa un esatta copia della figura originale, e si fanno li lati omologi nella proporzione spiegata *cor.3.* del medesimo teorema.

PROBL. IX.

Essendo data l'interfezione d'un piano, la sua linea evanescente col suo centro, e la distanza, trovare l'originale d'una projezione qualunque data sul quadro.

Sieno le cose disposte nella figura 10. come ne' Problemi 6. 7. sia proposto di ritrovare l'originale della figura *klmnp*. Prolungando le projezioni *kl*, *lm*, *mn*, finchè taglino l'interfezione, e la linea evanescente nelle loro interfezioni Q, R, T, e nelli loro punti evanescenti G, H, I. Sia di più prodotta la *kp*, fino al suo punto evanescente V, siano condotte OG, OH, OI, OV, e QK, RM, TN parallele alle tre prime dette rispettivamente; li punti d' interfezione L, M saranno li punti originali di *l*, *m* siano tirate O*k*, e O*n* che taglieranno QL, e DM, nelli punti originali K, e, N di *k*, *n*. Tirando KP parallela ad OV, e prolungando O*p*, che la taglia in P, sarà P, l'originale del punto *p*. Final-

Finalmente conducendo NP, si avrà la figura originale cercata KLMNP.

DIM.

La costruzione è evidente dal Problema 7. che è l'inverso di questo.

Scol. Nella medesima maniera si potrebbe ricercare la figura originale per mezzo delle direttrici come nella fig. 11.

PROBL. X.

Essendo date le medesime cose del Problema precedente, ritrovare la lunghezza dell'originale.

Sia I. II. la projezione data (*fig.* 10.) restando la figura come nelli Problemi precedenti. Si produca I. II. finchè incontri la linea evanescente nel punto evanescente V, e si conduca VO. Nella linea evanescente si prenda V3 = VO, e si conducano 3I. 3II. che tagliano l'intersezione in 1. 2. Sarà 1. 2. la lunghezza cercata dell'originale di I. II.

DIM.

Sia W l'intersezione di I. II. Essendo V3, uguale ad VO distanza del punto evanescente V, ed W2 essendo parallela ad V3, il punto 3. può essere considerato come il punto di veduta, e W12

e W 12 come la linea originale, e 31. 32. possono riguardarsi come li raggi visuali che formano la projezione I. II.

Cor. La lunghezza 1. 2. potrebbe ritrovarsi colla regola, e col compasso facendo 1. 2. : V3. (VO) $=$ I. II. $\times$ W V : IV $\times$ IIV. Imperocche condotta la retta II. e parallela a 2. 1.

Sarà 3. II. : II. e $=$ 3. 2. : 2. 1. onde 2. 1. $= \frac{3.\ 2. \times II.}{3.\ II.}$ e di più II e : II. I. $=$ 1. W : IW. Perciò II. e $= \frac{II.\ I \times 1.\ W}{I.\ W.}$ e conseguentemente 2. 1. $= \frac{3.\ 2. \times II.\ I. \times 1\ W}{2.\ II. \times I.\ W}$. In oltre V3 : 1. W $=$ V I : I W. Dunque V3 $= \frac{1\ W \times V\ I.}{I\ W}$

Dunque 1. 2. : V 3. $= \frac{3.\ 2. \times 11.\ I. \times 1.\ W}{3.\ 11. \times I\ W}$: $\frac{I.\ W\ \ V\ I.}{I\ W}$ $=$ 3. 2. $\times$ II. I : V I $\times$ 3. 11 $=$ III. $\times$ W V : II. V $\times$ I V : essendo 3. 2. : 3 II. $=$ WV : II. IV.

PROBL. XI.

Data la linea evanescente d'un piano col centro e la distanza della detta linea, data di più la projezione d'una linea nell'istesso piano, ritrovare la projezione d'un altra linea nel medesimo

desimo piano, che faccia un angolo dato colla prima.

Sia O (*fig.*10.) il punto di veduta, come nelli Problemi precedenti, GH essendo la linea evanescente, e *ab*, la projezione data, si dimanda di condurre *ac*, talmente che l'originale dell'angolo *bac*, sia uguale ad un angolo dato. Si produca *ab*, fino al suo punto evanescente G. Si conducano GO, OI che facciano l'angolo GOI uguale all'angolo dato. Dal punto I si tiri I*ac*, che sarà la linea cercata.

D I M.

Sia intesa la figura come nelli Problemi precedenti, e sia AB, l'originale di *ab*, e conseguentemente parallela ad OG (*Def.*15. *teor.*3.) Per l'istessa ragione, AC parallela ad OI è l'originale di *ac*, essendo I il suo punto evanescente (*teor.*3.). Ma AB e AC essendo parallele a OG, OI, l'angolo BAC, è uguale all'angolo GOI, che è uguale all'angolo dato, per la costruzione. Onde l'angolo *bac*, che è la projezione dell'angolo BAC, è ancora la projezione dell'angolo dato.

Scol. Se si richiedesse l'angolo *abc*, che è la projezione dell'angolo ABC, basterebbe fare l'angolo GOH, uguale al complemento dell'angolo ABC, a due retti. Imperocchè sia CB l'originale di *cb*, e conseguentemente parallela ad OH,

C (*teor.*3.)

(*teor*.3.) essendo H il punto evanescente. Di più poichè AC, è parallela ad OI, sarà l'angolo HOI uguale all'angolo BCA. Ma GOI è uguale all'angolo BAC. Dunque tutto l'angolo GOH è uguale al complemento dell'angolo ABC a due retti. (*lib*.1. *elem*. *prop*.32.)

PROBL. XII.

Data la linea evanescente d'un piano col suo centro e colla distanza; di più data la projezione d'un lato d'un triangolo dato di specie, ritrovare la projezione di tutto il triangolo.

Le projezioni cercate delli altri lati si ritrovano per li problemi precedenti, essendo dati li angoli del triangolo. Data la projezione *ab*, (*fig*.10.) del lato AB, nel triangolo ABC, si ritrova il punto evanescente I del lato *ac*, facendo l'angolo IOG uguale all'angolo CAB, e si ha il punto evanescente H del lato *bc*, prendendo l'angolo HOG uguale al complemento dell'angolo CBA a due angoli retti.

Scol. Se il punto evanescente della linea data *ab*, fosse troppo lontano, si potrebbe procedere in quest'altra maniera. Prendendo per intersezione una linea qualunque DR, parallela alla linea evanescente HG (*teor*.6.) e conducendo due linee H*b*E, I*a*F ad arbitrio per *b*, e, *a*, si trovino li originali A, B delli punti *a*, *b*, (*Probl*.9.) e si conduca AB. Di poi sopra il lato

lato AB, si finisca il triangolo originale, e si ritrovino le projezioni cercate delli altri lati (*Probl.*7.)

PROBL. XIII.

Data la linea evanescente d'un piano col suo centro e colla distanza. Data ancora la projezione d'un lato d'una figura qualunque in questo piano, ritrovare la projezione di tutta la figura.

Si divida tutta la figura data in triangoli col mezzo delle diagonali, e si ritrovino le projezioni di tutti questi triangoli (*Probl.* 12.) principiando da quelli che hanno la linea data per uno dei loro lati.

Si può fare l'istesso in diverse maniere, applicando li problemi precedenti, secondo che riuscirà più commodo nelli diversi casi, come si capirà meglio dalli Esempj seguenti.

ESEMPIO I.

Sia IK la linea evanescente (*fig.*14.) della quale sia S il centro, e OS la distanza. AB parallela ad IK sia la projezione data del lato d'un esagono regolare. Si conduca OG parallela ad IK (*Def.*15.) l'originale di AB essendo parallela al quadro (*Cor.*2. *Teor.*5.) li punti evanescenti H, I, K delli lati, e delle diagonali BC, FE, AD, AF, BE, CD, AC si troveranno (*per il probl.*11.) facendo li angoli HOG di 60°, IOG

di 120° , KOG di 30° . Conducendo di poi AK , BH , si avrà il punto C. Tirando AH , CI si avrà il punto D. Conducendo DE parallela ad IK , e tirando AS , si avrà il punto E ; imperocchè S è il punto evanescente di AE , l'originale dell' angolo EAB , essendo un angolo retto per la natura dell' essagono , come anche è retto GOS , e l'originale di AB essendo parallela al quadro. Finalmente tirando EH , e AI si ha il punto F , ed è compita la figura cercata.

ESEMPIO II.

Sia MRPTQS (*fig.* 15.) l'iconografia d'un icosaedro regolare appoggiato sopra una delle sue facce, si troverà la sua projezione, essendo data la projezione *ab* del lato AB, e VX essendo la linea evanescente, e , O il punto di veduta , come nelli problemi precedenti. L'iconografia originale si descrive facendo due essagoni regolari concentrici , e paralleli AFBICH , RMSQTP, delli quali i lati omologi siano nella proporzione delle parti d'una linea tagliata in media , e estrema ragione (*Def.* 3. *lib.* 6. *Elem.*) , e conducendo le linee , come si vede nella figura. Questa costruzione è evidente dalla propos. 16. del libro 13. delli elementi. Avendo prolungato *ab* fino al suo punto evanescente V, li punti evanescenti W , e X delli due altri lati del triangolo *abc* si ritrovano per il Probl. 11. Dipoi conducendo ad arbitrio SP parallela ad VX, e tirando W*a*, e W*b*, che

che la tagliano in *a*, *b*, e dividendo *ab* in *k*,*d*,*e*,*l* nella medesima proporzione di A B, nei punti K, D, E, L; tirando di più KW, *a*W, *e*W, *l*W si avranno le projezioni *k*, *d*, *e*, *l* delli punti K, D, E, L (*Probl.*3.) conducendo *d*X, *e*W, e *e*X si avranno li punti *f*, *g*. Conducendo *g*V si avranno li punti *h*, *i*. Tirando KX, e LW si hanno il punto *m*, ed il punto *n*, che è la projezione di N per l'interſezione di KX, e di LW già tirata. Facendo dipoi *do*, e *op* ogn'una uguale a *md*, e conducendo *o*W, *p*W, si hanno li punti *o*,*p* (*Probl.*3.) tirando *p*V si ha il punto *q* per la ſua interſezione con *l*W. Condotte *o*W, e *n*V si si ha *r*, e facendo *ms* ugule ad *md*, tirata *s*W, si ha *s*. Finalmente conducendo *s* X, che taglia *ro*W, si avrà il punto *t*. Il reſtante della figura ſi avrà congiungendo li punti già trovati, come ſarà evidente per la coſtruzione, avendo in queſta tralaſciato diverſe linee per evitare la confuſione.

ESEMPIO III.

Se ſi cercaſſe come nella fig. 16. la projezione dell'iconografia d'un dodecaedro regolare, avendo la projezione d'un lato dato, ſi dovrebbe ritrovare la figura originale per il probl. 9., e di poi ſi opererebbe per mezzo del probl. 7. Sarà facile al lettore di compire la detta projezione; oſſervando ſolamente, che l'iconografia originale ſi ha, deſcrivendo due decagoni concentrici, e paralleli, delli quali i lati omologi ſono li ſegmenti

d'una linea divisa in media, ed estrema ragione: Quest'istesso caso sarà considerato, e sciolto in appresso.

ESEMPIO IV.

Sia DC la linea evanescente (*fig.*17.), O il punto di veduta, come nelli problemi precedenti, si troverà la projezione ANBMLP d'un' ottaedro regolare, essendo data la projezione d'uno delli lati AB. Prolungando AB fino al suo punto evanescente C; il punto evanescente G delli lati AK, e NM, si trova per il problema 11., facendo l'angolo COG = 60°. Di poi (*per il Probl.*10.) presa una linea qualunque *bl* parallela a CD per interseziore, e facendo CD = CO, e GH = GO, si conducano DA, DB, che tagliano *bl* in *a*, *b*. Si tiri HA, che taglia *bl* in *a*, e presa *al* = *ab*, si conduca LH, che taglia AG in L, si avrà la projezione AL, essendo la sua originale uguale ad *al*, e conseguentemente all'originale di AB, essendo *al*, e *ab* uguali. Dividendo poi *ab*, e *al*, ognuna in tre parti uguali colli punti *e*, *f*, *i*, *k*, e conducendo *e*D, *f*D, *i*H, *k*H, si avranno li punti E, F, I, K (*per il Probl.*3.). Tirate le linee FG, KH, EI, si avranno li punti M, N, P, che finiscono la figura.

PROBL. XIV.

Dato il centro del quadro, e data la distanza colla linea evanescente del piano, ritrovare

vare il punto evanescente delle lineè perpendicolari al medesimo piano.

Sia AB (*fig.* 18.) la linea evanescente data, e sia C il centro del quadro. Si conduca CA perpendicolare ad AB, alla quale si faccia parallela CO uguale alla distanza del quadro. Si tiri AO, alla quale si alzi la perpendicolare OD, che tagli CA in D, punto evanescente cercato.

DIM.

Immaginiamo il triangolo AOD rivolgersi sul piano della figura, talmente che CO arrivi ad essergli perpendicolare, essendo O il punto di veduta. Ciò supposto, il piano che passa per il punto O, e per la linea AB, sarà il parallelo del piano originale; la linea OD sarà perpendicolare al detto parallelo, e conseguentemente sarà la parallela delle linee perpendicolari al piano originale. Onde sarà D il punto evanescente di queste perpendicolari. (*Def.* 17.)

Cor. 1. Se la linea evanescente AB passa per il centro del quadro, cioè, se il piano originale è perpendicolare al quadro, il punto D sarà infinitamente distante, la linea OD essendo parallela ad AD, e le projezioni delle linee perpendicolari al piano proposto saranno tutte perpendicolari ad AB, poichè incontrano la linea AC perpendicolare ad AB in una distanza infinita; onde saranno parallele tra di loro. Ciò è evidente per un' altra ragione, essendo le linee originali parallele al quadro.

*Cor.*1. Se il piano originale è parallelo al quadro, la diſtanza CA diventerà infinita; onde OA ſarà parallela a CA, e OD coinciderà con OC, cadendo il punto D nel centro del quadro C, conforme al Cor.2. del Teor.3.

*Cor.*3. E' evidente per la ſimilitudine delli triangoli AOC, AOD, che la retta CD è terza proporzionale ad AC, e CO; come ancora AD è terza proporzionale ad AC, e AO.

*Cor.*4. OD è la diſtanza del punto evaneſcente D.

PROBL. XV.

Dato il centro, e data la diſtanza del quadro, ritrovare la linea evaneſcente delli piani perpendicolari a quelle linee, che hanno un punto evaneſcente dato; e di più ritrovare il centro, e la diſtanza della detta linea evaneſcente.

Sia C il centro del quadro (*fig.*18.), e D il punto evaneſcente dato. Si conduca DC, alla quale ſi alzi la perpendicolare CO uguale alla diſtanza del quadro. Si tiri DO, alla quale ſi faccia OA perpendicolare, che taglia DC in A. Sia condotta AB perpendicolare a DC, eſſa ſarà la linea evaneſcente cercata, A il ſuo centro, (*Teor.*1.) e OA la ſua diſtanza.

Queſta coſtruzione è evidente dal problema precedente, ed è ancora manifeſto, che ſe ne poſſono ricavare i medeſimi Corollarj.

PRO-

PROBL. XVI.

Dato il centro colla diſtanza del quadro, tirare per un punto dato la linea evaneſcente d' un piano perpendicolare ad un altro piano, del quale la linea evaneſcente è data, e ritrovare la diſtanza, ed il centro di queſta linea evaneſcente.

Sia AB (*fig.* 18.) la linea evaneſcente data, C il centro del quadro, E il punto dato. Si trovi il punto evaneſcente D delle linee perpendicolari alli piani originali di AB (*Probl.* 14.). Sia condotta DE, che ſarà la linea evaneſcente cercata. Si conduca CF perpendicolare a DF, ſarà F il centro della linea evaneſcente DE (*Teor.* 1.). Si faccia un triangolo rettangolo, del quale un lato ſia CF, e l'altro ſia la perpendicolare uguale alla diſtanza del quadro, l'ipotenuſa ſarà la diſtanza della linea evaneſcente DE (*Cor. Teor.* 1.)

DIM.

Poichè il piano del quale ſi cerca la linea evaneſcente è perpendicolare all'altro piano, la ſua linea evaneſcente deve paſſare per il punto evaneſcente, D, delle linee perpendicolari a queſt'altro piano, eſſendo alcune di queſte linee nel piano cercato. Onde DE è la linea evaneſcente cercata. Le altre parti della coſtruzione ſono evidenti.

Cor. 1.

*Cor.*1. Se la linea FC è prolungata finchè tagli la linea evanescente data in B, sarà B il punto evanescente delle linee perpendicolari al piano originale della linea evanescente DE. Imperocchè questo punto evanescente è nella linea FC (*Probl.*14.), ed è anche nella linea evanescente data (*per la dimostrazione*).

*Cor.*2. Se le linee evanescenti AB, DE si incontrano in G, li punti B, D, G saranno li punti evanescenti delli tre lati dell'angolo solido del cubo, che sono perpendicolari tra di loro. E conducendo DB, saranno BG, GD, DB le linee evanescenti delli tre piani, che formano questo angolo solido.

Cor. 3. La distanza della linea evanescente DG è uguale alla linea FP, che è la perpendicolare alzata sul diametro DG d'un cerchio, che passa per il punto P. Imperocchè se si concepisce il piano del triangolo DOC alzato perpendicolarmente sul piano DBC, l'ipotenusa condotta dal punto O in F sarà la distanza della linea evanescente, e questa distanza sarà perpendicolare in F, (*prop.*12. *lib.*XI. *elem.*). Di più le tre linee DG, GB, DB essendo le linee evanescenti di tre piani perpendicolari l'uno all'altro, tirando dalli punti D, G, due linee concorrenti in O, sarà l'angolo DOG, retto. Onde il punto O, sarà nella circonferenza d'un cerchio descritto sul diametro DG, e per conseguenza la perpendicolare FP, al diametro DG, incontrando la circonferenza in P, sarà uguale alla perpendi-

pendicolare FO, cioè alla diſtanza della linea evaneſcente.

PROBL. XVII.

Dato il centro, e data la diſtanza del quadro col punto evaneſcente della commune interſezione di due piani inclinati l'uno all'altro in un angolo dato; data di più la linea evaneſcente di uno delli detti piani, ritrovare la linea evaneſcente dell'altro.

Sia C, il centro del quadro (*fig.* 18.) BG, la linea evaneſcente di uno dei piani, B il punto evaneſcente della commune interſezione di ambedue, H l'angolo d'inclinazione. Si ritrovi la linea evaneſcente GD, delli piani perpendicolari alle linee, delle quali il punto evaneſcente è B (*probl.* 15.). Da queſta linea evaneſcente, GD, ſia tagliata in, G, la linea evaneſcente data. Si trovi in, GD, il punto evaneſcente E, delle linee che fanno l'angolo dato H, colle linee delle quali, G, è il punto evaneſcente (*probl.* 2.); cioè in BCF, perpendicolare a GFD, ſi prenda FP, uguale alla diſtanza della linea evaneſcente GD, trovata per il problema 15. Si conducano PG, PE che fanno l'angolo EPG uguale all'angolo H. Si conduca BE, che farà la linea evaneſcente cercata.

DIM.

D I M.

Immaginiamo il triangolo GPE, rivolgersi sulla linea GE, talmente che il punto P, sia nel punto di veduta perpendicolare al centro del quadro C. In questo caso li piani BPG, GPD, DPB, saranno li paralleli di tre piani originali, delli quali le linee evanescenti sono BG, GD, DB, il piano che ha per linea evanescente DG, essendo perpendicolare alli due altri piani; poichè è perpendicolare alla loro commune interfezione, della quale è B, il punto evanescente. Onde li piani originali che hanno per linee evanescenti BG, BD, sono inclinati l'uno all'altro nell'angolo EPG, cioè nell'angolo H; imperocchè l'inclinazione di due piani è sempre misurata in un piano perpendicolare alla loro commune interfezione. Onde BG, essendo la linea evanescente data, sarà BE la linea evanescente cercata.

Cor. Il centro della linea evanescente BE, si ritrova, alzando dal punto C, una perpendicolare alla detta linea evanescente (*teor.* 1.) Di poi si ritrova la distanza della medesima linea evanescente, come è stata trovata la distanza PF, nel probl. 16.

P R O B L. XVIII.

Dato il centro, e data la distanza del quadro colla linea evanescente d'una delle facce d'un solido

lido proposto qualunque. Data di più la projezione d'una linea in questa istessa faccia, ritrovare la projezione di tutta la figura.

Si ritrovi per mezzo della projezione data la projezione dell'iconografia della figura proposta sul piano della faccia, della quale è data la linea evanescente(*probl.*13.)Di poi(per il *probl.*16.) si ritrovi la linea evanescente del piano dell'ortografia, e si descriva la projezione dell'ortografia per mezzo delle linee già date nell'iconografia (*probl.*13.). Finalmente colle intersezioni delle projezioni delle perpendicolari all'iconografia, e all'ortografia, si troveranno diversi punti della projezione cercata.

In un'altra maniera. Essendo data la projezione d'una faccia della quale è data la linea evanescente, per mezzo della projezione della linea data si ritrovino le linee evanescenti delle facce contigue (*probl.*17.), e si descrivano le loro projezioni per mezzo delle linee date nella projezione della prima faccia, e si continui nell'istessa maniera finchè sia terminata la projezione cercata.

Ho dato nelle proposizioni precedenti un metodo generale per ridurre in perspettiva qualunque figura proposta, ma si possono in prattica adoperare alcuni spedienti più brevi secondo la natura delli problemi proposti. Come si vedrà dalli esempj seguenti.

ESEM-

ESEMPIO V.

La figura 19. rappresenta la projezione d'un dodecaedro regolare per mezzo dell'iconografia, e ortografia, essendo data la projezione AB, d'un lato parallelo al quadro; la retta FG, parallela ad AB, essendo la linea evanescente data della faccia ABCDE, F il centro della detta linea evanescente, H il centro del quadro, è H*o* la distanza. Per evitare la confusione delle linee, sono state messe a parte l'iconografia, e l'ortografia ritrovate nella maniera seguente.

Sia condotta ad arbitrio, *ab*, parallela ad AB, e ad una distanza sufficiente, tirando IA, e IB, che tagliano *ab*, in *a*, e, *b*, la linea AB, è trasferita in *ab*, essendo I il punto evanescente delle linee perpendicolari alla faccia ABCDE della quale la linea evanescente è FG, ritrovata(*per il probl.* 14.) Il che essendo fatto, tutta l'iconografia si descrive sulla linea *ab*, (*per il probl.* 13.), come è descritta nel 3. esempio.

Quanto all'ortografia, la retta IHF, che passa per lo centro del quadro si sceglie come più opportuna per la sua linea evanescente, l'ortografia essendo più semplice in questo caso, e le projezioni delle linee, che sono perpendicolari al quadro essendo tutte perpendicolari ad FI (*cor.* 1. *probl.* 14.). Si conduca GA dal punto evanescente G della linea, *ae*, nell'iconografia, e si tiri *el*, che la taglia in E, si avrà la projezione AE. Di poi con-

conducendo A*a*, E*e*, tutte due parallele a GF, e che rappresentano, come si è già detto, le perpendicolari all'ortografia, si tiri ad arbitrio *ae*, che passa per F, e che le taglia in *a*, *e*, si avrà la linea *ae*, colla quale si descrive tutta la projezione dell'ortografia (*per il probl.*13.).

Essendo date le projezioni dell'iconografia, e dell'ortografia, si avrà un punto qualunque K della projezione cercata conducendo K*k* parallela ad FG, e tirando KI dalli punti corrispondenti K, *k*, queste due linee s'incontreranno nel punto cercato K.

Per l'intelligenza della projezione del cubo rappresentata in questa figura, basta avvisare il lettore, che FG, FI, sono due linee evanescenti del detto cubo, e che la terza è una linea, che passa per I, parallela ad FG.

Quanto alle ombre, che sono supposte tramandate dal Sole sul piano della faccia ABCDE del dodecaedro; l'ombra *u*V, d'una linea qualunque V*u*, si ritrova nella maniera seguente; G è il punto evanescente dato di tutti i raggi di luce, li quali partendo dal Sole sono considerati come paralleli. Onde IS, che passa per lo punto evanescente I della linea V*u*, e per lo punto evanescente S delli raggi, è la linea evanescente del piano composto di tutti i raggi, che passano per la linea *uv*, e che formano l'ombra *vu*, e IS tagliando in S la linea evanescente FG, del piano sopra il quale l'ombra è mandata, sarà S, il punto evanescente dell'ombra *vu*, che è l'interfezione del piano

no dell'ombra, del quale la linea evanescente è *Is*, e del piano, sopra il quale l'ombra è mandata, essendo *s*, il punto evanescente di questa intersezione (*cor.2. teor.7.*) perciò condotta *vs*, e tirata VS, che la taglia in *u*, sarà *vu*, l'ombra della linea *u*V.

Scolio. Nell'originale dell'ortografia li punti *e*, *m*, *s*, *p*, sono gli angoli d'un quadrato. Le linee *on*, *al*, *qr*, essendo parallele ad *em*, e *oq*, *nr*, essendo parallele ad *ep*, e uguali ad *al*, saranno uguali le linee, *tk*, *on*, *qr*, e le linee *on*, *em*, *al*, saranno in continua proporzione geometrica del minore al maggiore segmento d'una linea divisa in estrema, e media ragione. Questo scolio si ricava facilmente dalla *prop.*17. *del lib.*13. delli elementi. Per evitare la confusione della figura sono state tralasciate alcune linee citate nell'esempio presente.

ESEMPIO VI.

Nella figura 20. la linea evanescente della terra sopra la quale si appoggia la fabbrica è AICKB, che passa per il centro del quadro C, la distanza del quadro essendo uguale a CO. BG, e AH, sono le linee evanescenti dei piani retti, *abde*, DEN, e *abc*, DF*nm*; G, e H, essendo li punti evanescenti delle linee *be*, e *nm*, che toccano li più alti angoli dei due scalini, e perciò HG, BH sono le linee evanescenti dei piani, che toccano il più alto, e il più basso orlo della scala.

Il

Il lato dato *br*, della base del tetraedro regolare è parallelo alla linea evanescente AB. Il punto *u*, che è la projezione del centro della base *brp*, e la posizione del vertice *o*, si ritrovano conducendo, *pq*, parallela ad AB, e *Ir*, che l'incontra in *q*, e tirando C*p*, e *bq*, che la taglia in *u*, la linea C*d*, perpendicolare ad AB, è la linea evanescente d'un piano perpendicolare alla base *brp*, che stà sopra *up*, e passa per la linea *po*, della quale il punto evanescente è *l*, ritrovato (*Probl.* 11.) facendo CQ uguale alla distanza del quadro, e l'angolo, *d*QC, uguale all' originale di *upo*. La linea, VX, è la linea evanescente della faccia, *upr*, colla quale si descrive quella faccia, essendo data, *pr*, (*Probl.* 11.) come è stata descritta la faccia, *brp*, sopra *br*. L'ottaedro regolare, e l'icosaedro si descrivono per mezzo della loro iconografia, e ortografia, il quale metodo è sufficientemente spiegato nell' esempio precedente. Voglio solamente avvisare il lettore, che nell'ortografia ABCDEFGH, dell'icosaedro, le linee CD, AF, GH, sono uguali, come anche le linee AC, FD, BE, che AF, è a BE, come è il minore al maggiore segmento d'una linea divisa in estrema, e media ragione, come si ricava dalla Prop. 16. del lib. 13. delli elementi.

La luce essendo supposta venire dal Sole, i raggi sono paralleli al quadro, e alla linea AM, talmente che l'ombra, P, d'un punto qualunque, D, si trovi tirando per la sua posizione la

linea, NP, parallela ad AB, e DP, parallela ad AM, che la taglia in *l*. Quanto all' ombra del tetraedro, la quale si alza verso l'estremità delló scalino, avendo nella medesima maniera trovato il punto *s*, che sarebbe l' ombra del punto, *o*, sulla terra, se non vi fosse la scala, e conducendo *sb*, *sp*, si avranno le ombre *bo*, e *po*. Si faccia, che *su*, e *sp*, taglinó l'orlo il più basso della scala in *y*, e, *x*, tirando allora, *xt*, perpendicolare ad AC, e che taglia, *os*, in *t*, si avrà l'ombra, *t*, del vertice, *o*, sull'estremità delli scalini, e condotta, *xt*, si avrà la parte dell'ombra di *op*, che cade sopra la detta estremità. Nell'istessa maniera si ritrova l'ombra di *ob*. Tutti li raggi essendo paralleli ad AM, ed, A, essendo il punto evanescente di, DF, AM è la linea evanescente del piano formató dalli raggi, che passano per la linea DF, e BM, essendo la linea evanescente del muro, sopra il quale è tramandata l' ombra F*f*, M è il punto evanescente della commune interszione di questi due piani, cioè dell'ombra, F*f*, della linea D*f*.

ESEMPIO VII.

Nella figura 21. la retta, ACB, che passa per il centro del quadro C, è la linea evanescente della terra; H, è il punto evanescente dell'orlo, EF, sopra il quale è appoggiato un trave, e le altre estremità si suppongono parallele a questa; D, è il punto evanescente dell'orlo GH, e DB,

e DB, che è perpendicolare ad AB, è la linea evanescente del piano EGH; P, Q, sono i punti evanescenti dei lati MK, KN d'un tetraedro regolare, e conseguentemente, PQ, è la linea evanescente del triangolo KNM, *l* è la luce, e, A, la sua posizione. Avendo BE*g*, cioè, l'intersezione del piano retto EGH col sito, si avrà il punto, *g*, in cui la retta EGH, incontra la terra, e che è l'intersezione di HG colla terra. BE, taglia l'estremità, SR, della muraglia SR*b*, in R, e conseguentemente R*b*, perpendicolare ad AB, è l'intersezione del muro col piano EGH, e perciò il punto, *b*, in cui s'incontrano R*b*, e GH, è l'intersezione della linea GHI colla muraglia. DL*l*, è la projezione d'una linea parallela all'originale di GH, essendo, D, il punto evanescente, e B*l*, è la sua posizione; onde, *l*, è la sua intersezione colla terra. Le originali di, L*l*, e HG, essendo parallele, esse stanno nel medesimo piano, cioè, nel piano, che forma l'ombra di HS. Ma, *lg*, rappresenta l'intersezione di questo piano colla terra; onde, *lg*, prolungata è una parte dell'ombra, e tirando, *l*G, che la taglia in, *g*, sarà, *g*, l'ombra di, G, e *g*G, sarà la parte dell'ombra di, HG, che arriva sulla terra. Conducendo allora, *sb*, e tirando *l*H, che la taglia in, *b*, sarà, *bs*, l'altra parte dell'ombra verso il muro.

Condotte, *gp*, e DT, ambedue parallele ad AB, saranno, D*g*, *gp* le projezioni di due linee in un piano del quale, DT, è la linea evanescen-

te, e, T, è il punto evanefcente della commune interfezione di queſto piano col piano del triangolo KMN (*cor.2. teor.7.*), eſſendo, PQT, la ſua linea evanefcente. Onde tirando T*p*, che taglia, *g*D, in V, ſarà V l'interfezione della linea, *g*GHD, col piano di queſto triangolo KMN. Allora, *lg*, tagliando MK in, *r*, condotta, *rt*V, ſarà, *rt*, la parte dell'ombra di GH, che cade ſopra il triangolo KMN.

Avendo ſpiegato la maniera di ritrovare l'ombra di, GH, il reſtante non ha biſogno di altra ſpiegazione.

ESEMPIO VIII.

Nella fig.22. C, è il centro del quadro, CH, la linea evanefcente del ſito, e della ſuperficie dell'acqua, l'ombra della quale produce le riflesſioni della figura; S è il punto evanefcente dei raggi di luce, i quali ſono ſuppoſti venire dal Sole.

L'ombra della perpendicolare, BD, ſi trova in queſta maniera. Condotta, SA, perpendicolare a, CA, ſi ha il punto evanefcente, A, dell' ombra ſul ſito BF. Di poi ſi prenda un punto qualunque, E, nella circonferenza della baſe del cilindro, la quale è parallela al quadro, eſſendo l' aſſe perpendicolare al quadro, ed eſſendo C, per conſeguenza il punto evanefcente. Si trovi la poſizione del detto punto E ſul ſito, *e*; ſi conduca, CE, e ſi tiri, C*e*, che taglia BA in *f*, allora

lora condotta *f*P perpendicolare a CA, e che taglia CE in, P, si avrà un punto *p* dell'ombra sulla superficie del cilindro. Nella medesima maniera si avranno tutti li punti dell'ombra. Per dimostrare questa costruzione, basta che il lettore consideri, che l'originale di *e*EPF*e*, è un piano retto, che taglia il cilindro in, EP, e, *f*P, è l'ombra di BD sù questo piano. Onde, P, è il punto ove cade quest'ombra sulla superficie del cilindro. Si trova in questa maniera un punto qualunque, Q, dell'ombra della circonferenza del cilindro interiore sulla sua superficie. Si conduca, CS, alla quale si tiri ad arbitrio la parallela, GH, che taglia questa circonferenza in G, e H. Tirata, GS, e condotta CH, che la taglia in, Q, sarà, Q, il punto cercato; imperocchè, C, essendo il punto evanescente dell'asse del cilindro e di CH, HQ è nella superficie del cilindro, e GH, essendo parallela a, CS, è la projezione d'una linea parallela al quadro, in un piano del quale, CS, è la linea evanescente, e la sua originale essendo parallela al quadro è nella base d'un cilindro, che è parallelo al quadro. Onde le originali di, HS, HC, e GS, essendo nel medesimo piano, sarà Q, la projezione del punto in cui li raggi di luce dei quali la projezione è GS, tagliano la superficie del cilindro, cioè Q è la projezione dell'ombra dell'originale del punto G, nella circonferenza della base sulla superficie interiore del cilindro.

Il punto, *b*, essendo la posizione del punto, D, sulla superficie dell' acqua, si trova la rifles-sione, *d*, del punto, D, continuando la perpendicolare, D*b*, finchè, *bd*, sia uguale a *b*D; ciò è evidente per le leggi della riflessione, imperocchè la riflessione fa comparire l'oggetto nella parte opposta del piano riflettente nella stessa maniera, che l'oggetto stà dall'altra parte del medesimo piano. Perciò prendendo in AS, la retta A*s*, uguale ad AS, si trova un punto qualunque *q*, nell' ombra sulla superficie del cilindro interiore nella medesima maniera, che si ritrova, Q, nella figura reale, adoprando il punto, *s*, in vece di S.

L'ombra del cilindro sulla superficie del cono si ritrova nell' istesso modo come l' ombra della linea, BD, sulla superficie del cilindro.

Scol. Si deve osservare, che nelli esempj precedenti io ho considerato le ombre solamente come projezioni di figure date sopra una data superficie per mezzo di punti luminosi dati. Imperocchè considero il corpo luminoso come un punto, per sfuggire le difficoltà alle quali sarebbe soggetta la descrizione delle ombre, se si mettesse in considerazione la grandezza del corpo luminoso, ed essendo sufficiente per la prattica della perspettiva di considerare il centro del corpo luminoso. Avendo trovato in questa supposizione il contorno dell' ombra, si potrà descrivere la penombra, più coll'ajuto di esattissime osservazioni, che colli precetti dell'arte, essendo difficile,

ficile di portare ogni cosa ad una esattissima costruzione matematica, almeno quanto sarebbe conveniente per la prattica. Ma un' artista ben' istruito della perspettiva potrà supplire sufficientemente alla teorìa nelli casi, che richiedono maggiore esattezza. Del resto si vede, che la dottrina delle ombre considerate, come ho detto, si riduce alli principj communi della perspettiva.

ESEMPIO IX.

Nella figura 23. essendo tutto facilmente inteso da quel che è stato già spiegato, io dimostrerò solamente il modo di ritrovare in uno specchio la riflessione d'un quadro immmaginato sul cavalletto del pittore. A, è il centro del quadro, AB, la linea evanescente del sito, la distanza del quadro essendo uguale ad AB. AC è la linea evanescente del quadro sul cavalletto, e CD la linea evanescente dello specchio. Per lo punto, *a*, in cui l'orlo, *ba*, del piede della tavola incontra la superficie della medesima, si tiri *ae*, e per lo punto, *b*, si tiri, *bd*, ambedue parallele ad AB, la retta, *bd*, incontrerà l'intersezione, *cd*, della superficie del quadro col sito in, *d*, e conducendo *de* parallela ad AC, e che taglia, *ae*, in, *e*, condotta, A*e*, si avrà la projezione A*e*, della commune intersezione della superficie della tavola, e del quadro; imperocchè, *ae*, essendo parallela ad, AB, essa è la projezione d'una linea

nella ſuperficie della tavola, parallela al quadro, e per l'iſteſſa ragione, *bd*, è la projezione d'una linea ſopra il ſito, e, *de*, è la projezione d'una linea nel piano del quadro, e queſte due linee ſono parallele al quadro, ſiccome ancora, *ab*, è la projezione d'una linea parallela al quadro. Onde, *abde*, è la projezione d'un trapezio parallelo al quadro, l'angolo del quale, *e*, è la commune interſezione della ſuperficie ſulla tavola, e del quadro ſul cavalletto. Ma, A, eſſendo la commune interſezione delle linee evaneſcenti di queſti due piani, è il punto evaneſcente della loro commune interſezione, e perciò, *e*A, è la projezione di queſta interſezione (*cor*.2. *teor*.7.). Per l'iſteſſa ragione, eſſendo, *o*, la projezione d'un punto, in cui la ſuperficie del vetro tocca la tavola, ed, E, eſſendo la commune interſezione delle linee evaneſcenti, AB, e, CD, ſarà, O*e*, la projezione della commune interſezione della ſuperficie della tavola, e della ſuperficie del vetro. Onde il punto, *f*, interſezione di, *o*E, e, *e*A, è la projezione del punto nel quale s'incontrano queſti tre piani, cioè, della ſuperficie della tavola, del vetro, e del quadro. Onde tirando, *f*C, eſſa ſarà la projezione della commune interſezione del quadro, e dello ſpecchio.

Avendo trovato il punto evaneſcente, P, delle linee perpendicolari al piano dello ſpecchio del quale la linea evaneſcente è CD (*Probl*.14.), e conducendo, PA, per il punto evaneſcente, A,

della

della linea, GH, e che taglia CD in D, sarà D, il punto evanescente della posizione di GH sopra il piano del vetro. Onde GH tagliando, *Cf*, in, *i*, sarà, D*i*, la projezione di questa posizione. Di più tirando GP, che taglia, D*i*, in *k*, sarà, *k*, la posizione del punto, G, sul vetro. Perciò sopra, GP, si prenda, *kg*, per rappresentare una linea uguale a quella, che viene rappresentata per, G*k*, (*Probl.*3.) sarà, *g*, la projezione della riflessione di, G, e, G*i*, è la riflessione di G*i*, e conducendo, PH, che taglia, *gi*, in, *h*, sarà, *gh*, la riflessione di GH. Nella medesima maniera si troveranno qualunque altre linee nella riflessione.

Può ancora descriversi la riflessione del quadro per mezzo della sua linea evanescente nell' istessa maniera, che è stata descritta la projezione del quadro medesimo; imperocchè in PAD preso, *a*D, per rappresentare una linea uguale alla linea rappresentata per, AD, sarà, *d*, il punto evanescente della linea riflessa, *gh*, e, C*a*, è la linea evanescente del quadro riflesso.

Fine della Prima Parte.

PAR-

PARTE SECONDA

Della maniera di ritrovare le figure originali dalle loro projezioni date, e della situazione necessaria per considerare le projezioni particolari.

PROBL. XVIII.

DAta la projezione d'una linea divisa, e il suo punto evanescente, ritrovare la proporzione delle parti dell'originale.

Sia AB (*fig.*7.) la projezione data, divisa in C, ed V il suo punto evanescente. Si conduca ad arbitrio VO, alla quale si faccia, *ab*, parallela. Da un punto qualunque O, nella linea OV, si tirino le linee OA, OB, OC, che tagliano, *ab*, in *a*, *b*, *c*. Sarà l'originale di AC, all'originale di, CB, come *ac*, è a *cb*.

Cor. $ac : bc = AC \times BV : BC \times AV$.

PROBL. XIX.

Essendo data la projezione d'una linea divisa in due parti, e la proporzione dell'originale, ritrovare il suo punto evanescente.

Sia, AB, la projezione data divisa in C. (*fig.*7.) per lo punto, C, si conduca ad arbitrio,

trio, aCb, ed in essa si prenda aC, a, Cb, come l'originale di AC è all'originale di CB, e si conducano, Aa, Bb, che s'incontrano in o. Si tiri, OV, parallela ad, ab, che taglia AB in V, che sarà il punto evanescente cercato.

Cor. BV : BA = $Ca \times$ CB : $Cb \times$ AC — $Ca \times$ CB. Questi due problemi colli loro corollari sono evidenti per il problema 3., e suoi corollari.

PROBL. XX.

Essendo data la projezione d'un triangolo colla sua linea evanescente, il suo centro, e la distanza, ritrovare la specie del triangolo originale.

Sia, abc, (*fig.*10.) la projezione data, HG, la sua linea evanescente, S, il suo centro, e SO, perpendicolare ad, HG, ed uguale alla sua distanza. Avendo prolungato li lati della projezione data, finchè taglino la linea evanescente nelli loro punti evanescenti G, H, I, si conducano GO, GH, e GI, li originali delli angoli bac, abH, acb, saranno uguali a GOI, IOH, GOH rispettivamnete (*Probl.*2.). Onde è data la specie del triangolo originale.

PROBL. XXI.

Essendo data la projezione d'un triangolo d'una specie data, e la sua linea evanescente, ritro-

trovare il centro, e la diſtanza di queſta linea evaneſcente.

Sia ABC (*fig.*12.) la projezione data, e FD la ſua linea evaneſcente. Siano prolungati i lati della projezione, finchè taglino la linea evaneſcente nelli loro punti evaneſcenti, D, E, F. Si divida DE, EF, in G, e H, e ſi conduca GI, e HK perperpendicolare ad FD, facendo GI a GE come il raggio è alla tangente dell'angolo rappreſentato per BAC. Si faccia di più KH a EH, come il raggio è alla tangente dell'angolo rappreſentato per BCA, talmente che, EIG, e FKH ſiano uguali alli detti angoli. Dalli centri I, K, colli raggi IE, KE, ſi deſcrivano due cerchi, che ſi tagliano in O, e ſi conduca, OS, che taglia, FD, ad angoli retti in S, ſarà, S, il centro; e, SO, la diſtanza cercata.

D I M.

Si ſupponga, G, il centro, e SO, la diſtanza della linea evaneſcente, FD; li originali delli angoli BAC, BCA ſaranno uguali a COE, e EOF (*Probl.*2.). Ma per la natura del cerchio, DOE, e FOE, ſono uguali a GIE, e HKE, li quali (*per conſtr.*) ſono uguali alli angoli rappreſentati per BAC, e BCA. Onde, S, è il cento, e SO, la diſtanza cercata.

PRO-

PROBL. XXII.

Essendo data la projezione d'un trapezio di una specie data, ritrovare la sua linea evanescente, il centro, e la distanza.

Sia, *abcd*, (*fig.*12.) la projezione data, si tirino le diagonali, *ac*, *bd*, che s'incontrano in, *e*; e per le projezioni delle originali di *ae*, *ac*, e, *be*, *ed*, si trovino li punti evanescenti E, F, delle linee *ac*, *bd*, (*Probl.*19.). Si conduca, EF, che sarà la linea evanescente cercata. Di più per la specie data dell'originale del triangolo, *abc*. Si trovi il centro, S, e la distanza, SO, (*Probl.*21.)

PROBL. XXI.

Essendo data la projezione d'un parallelo pipedo rettangolo ritrovare il centro, e la distanza del quadro, e la specie della figura originale.

Sia, ABCDFFG, (*fig.* 24.) la projezione data, siano prolungate le projezioni delli lati paralleli finchè s'incontrino nelli loro punti evanescenti H, I, K, e si conducano HI, HK, IK, le quali saranno le linee evanescenti delle diverse facce della figura cercata, che contengono un' angolo solido retto. Si conduca, K*d*, perpendicolare ad HI, e HM perpendicolare a KI, che l'incontra in S, sarà, S, il centro del quadro

(*cor.*

(*cor.*2. *Probl.*16.). Sul diametro, *l*K, si descriva un cerchio, e si conduca, SO, perpendicolare ad, *l*K, che lo taglia in, O, sarà, OS, la distanza del quadro (*Probl.* 14.) essendo *l*OK un'angolo retto per la natura del cerchio. Finalmente si trovino le distanze delle linee evanescenti KI, IH (*cor.*3. *Probl.*16.) M, e *l* essendo i loro centri (*teor.*1.), e si trovi la specie delle originali delle facce DAEF, DABC (*Probl* 20.)

Cor. Quando la linea evanescente di una delle facce, per esempio IH, passa per il centro del quadro, il punto evanescente, K, delli lati, che li sono perpendicolari è a una distanza infinita, onde sarebbe indeterminata la situazione di *l*K; talmente che la specie della faccia, ABCDE, può essere presa ad arbitrio, e allora il centro, e la distanza del quadro si trovano per il problema 20. In questo caso se si richiedesse solamente, che la projezione proposta rappresentasse un parallelopipedo rettangolo in generale, il sito del punto di veduta sarebbe in qualunque punto della circonferenza d'un cerchio descritto sul diametro HI, e in un piano perpendicolare al quadro. Imperocchè essendo indeterminato il punto, *l*, sarà anche indeterminata la specie della figura, talmente che il punto di veduta potrebbe essere in qualunque punto della circonferenza. Onde se il semicircolo sia perpendicolare al quadro, l'occhio dello spettatore posto in qualunque punto della semicirconferen-

za

za giudicherebbe la figura, AD, essere un parallelopipedo rettangolo, benchè la specie della figura fosse molto diversa secondo la diversa situazione dell'occhio. Lascio alli artisti a considerare se questo corollario potrebbe essere di qualche uso nel dipingere le scene delli Teatri. Imperocchè se supponiamo, *l*, K, essere li due punti, che sogliono chiamarsi nelli volgari libri di perspettiva: *punti di distanza*: e se li edifizj sono talmente disegnati, che li loro lati siano terminati a questi punti, come si vede nella figura presente, essi comparirebbero rettangoli alli occhi delli spettatori, essendo le loggie nella semicirconferenza del cerchio.

Fine della Perspettiva.



APPEN-

APPENDICE.

NUM. I.

Metodo per rappresentare le figure sopra una superficie qualunque irregolare.

DA tutto quel che si è detto in quest'Opera per spiegare i principj della perspettiva, e specialmente in fine delle definizioni, è evidente, che il secondo teorema può intendersi di qualunque superficie o concava, o convessa, o in qualunque modo irregolare. Sia la superficie del quadro ABC (*fig.*3.) d'una forma qualunque, la projezione, *fg*, della linea originale, FG, sarà sempre l'intersezione del quadro col piano del triangolo FGO; ma la parallela OV, è in questo piano (*teor.*3.); onde se la fiammella d'una candela è talmente diretta, che essa mandi l'ombra di OV sopra un punto qualunque, B, della linea FG, l'istessa ombra coprirà tutta la linea FG, e nell'istesso tempo la linea V*fg*B sopra il quadro, la quale è la projezione di FG; tutti i raggi, che vengono dalla candela, e che passano per la linea, OV, facendo in questo caso un piano, che coincide col piano del triangolo OFG. Il medesimo accaderebbe, se alcuno collocasse talmente l'occhio, che un punto qualunque della linea FG, li sembrasse coperto dalla

dalla linea OV, in questo caso OV comparirebbe coprire tutta la projezione *Vfg*. Nell'istessa maniera se una candela è talmente collocata, che l'ombra di OV passi per un punto qualunque della projezione *Vg*, la stessa ombra coinciderà con tutta la projezione; e se alcuno si ponga talmente, che OV sembri coprire un punto qualunque della detta projezione, essa comparirà coperta tutta. Onde io credo che possa essere utilissimo il metodo seguente per disegnare le projezioni di ogni sorta di figure sopra una superficie qualunque, per esempio, sopra le muraglie, le cuppole delle Chiese, li solaj delli Palazzi, le scene delli teatri &c.

Si scelga qualche linea principale nel disegno da farsi, ed avendo con qualche metodo ritrovato le projezioni delli suoi punti estremi, si passi per lo punto di veduta un filo parallelo alla linea originale, si mandi l'ombra del medesimo filo sulli punti già trovati, quest'ombra segnata col lapis sarà la projezione di questa linea principale; ovvero se pare più a proposito in qualche caso particolare, si ponga l'occhio in tale sito, che il filo parallelo sembri coprire li due punti già segnati, e si adoperi qualche assistente per segnare la projezione cercata. Per esempio sia *pb*, (*fig.*20.) questa projezione principale: per ritrovare la projezione *o*, di qualche altro punto della figura da disegnarsi, sia immaginato questo punto essere la sommità d'un triangolo, del quale la base è l'originale della projezio-

ne già trovata, e sia collocato il filo, che deve passare per lo punto di veduta in una situazione parallela all'originale di uno dei lati di questo triangolo, e si mandi la sua ombra sopra l'estremità della projezione data, e si segni come prima: si avrà la projezione indefinita di questo lato *bo*. Si faccia l'istesso per un'altro lato, e coll'intersezione di queste projezioni, per esempio, *bo*, *po*, avremo la projezione del punto cercato. Questo metodo può servire per ritrovare la projezione di una figura qualunque, e può essere utilissimo alli pratici di perspettiva.



NUM.

NUM. II.

Della miſtura delli colori ſecondo li principj del Cavalier Iſaac Nevvton.

NElli colori ſi devono conſiderare due coſe; il colore propriamente detto, e la forza della luce, e dell'ombra. Imperocchè ſiccome li diverſi colori, per eſempio, il roſſo, ed il verde poſſono avere la medeſima forza di colore, così ancora due oggetti, dei quali uno è molto più oſcuro dell'altro, poſſono avere l'iſteſſo colore, per eſempio, turchino vivo, e turchino oſcuro.

Quanto al colore propriamente detto, ſi devono anche conſiderare due coſe, 1. la ſpezie di colore, 2. la perfezione o l'imperfezione del colore nella medeſima ſpezie. Li colori differiſcono di ſpezie, come il turchino ed il roſſo; e li colori dell'iſteſſa ſpezie differiſcono in grado di perfezione, come il roſſo d'un prato di papaveri è molto più perfetto, che un roſſo di mattoni. Queſta qualità di perfezione e d'imperfezione nelli colori è eſpreſſa dalli Pittori colli termini di *puro*, o *ſemplice*, e *rotto*, le quali denominazioni ſono preſe dalla pratica ſolita nel fare li colori imperfetti colla loro miſtura, la quale viene chiamata, *rompere* il colore. Quanto a queſta qualità delli colori, il Signor Iſaac Nevvton nella ſua eccellente opera

di ottica dimostra, che ogni raggio di luce ha il suo colore proprio, che egli porta sempre seco, e non perde mai, in qualunque maniera la luce venga riflessa, o rifratta. Questi colori naturali delli raggi sono i colori semplici, e il loro ordine naturale, come essi comparisconο separati per la refrazione del prisma, è il seguente, rosso, arancio, giallo, verde, turchino, indico, pavonazzo. Tutti li colori imperfetti o rotti si fanno colla composizione, e mescolanza di questi semplici colori, per esempio, li raggi gialli mescolati colli turchini fanno il verde, ma non così perfetto, come sono li raggi naturali verdi. Similmente li raggi rossi, e gialli compongono un colore arancio, ma non così perfetto, come è l'arancio semplice. Con una giusta proporzione di tutti li raggi naturali assieme si produce la bianchezza, la quale è indifferente a qualunque colore semplice, e non può dirsi inclinare più a un colore, che ad un altro. Per bianco intendo un colore tra il bianco il più vivo, ed il nero il più oscuro; imperocchè non avendo considerato sin'adesso li gradi di luce, e d'ombra: tutti li colori, dal nero fino al bianco, devono considerarsi come dell'istesso colore. Da questa osservazione della natura del bianco, pare, che li colori rotti sono medii tra li colori semplici, ed il bianco, e che più il colore è rotto, più è vicino al bianco; e che più il colore è lontano dal bianco, più è semplice.

Avendo spiegato la natura delli colori, e l'effet-

l'effetto della loro mescolanza, per ritrovare esattamente il colore prodotto dalla mistura d'un numero di colori qualunque dati, il Signore Isaac Nevvton dispone li colori nella maniera seguente. Sia il cerchio ADFA (*fig.* 25.) la circonferenza del quale sia divisa in sette parti AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA, nella medesima proporzione che hanno fra di loro le frazioni $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$. Tra A e B si dispongano tutti i generi di rosso, da B in C tutti i generi d'arancio, da C in D tutti i generi di verde, da E in F tutti i generi di turchino, da F in G tutti i generi d'indico, e da G in A tutti i generi di pavonazzo. Avendo così disposti li colori semplici, O, sarà il luogo del bianco, e tra il centro e la circonferenza sono i luoghi degli altri colori rotti; li colori che sono più vicini al centro essendo li più composti, e quelli che ne sono più lontani essendo li meno composti. Nella linea O1, tutti li colori in 1, 2, 3, 4, sono dell'istessa specie, cioè il verde inclinante verso il turchino, ma il colore in 1, è il colore semplice naturale, il colore in 2, è un poco più composto o rotto, il colore in 3, più composto, il colore in 4, è ancora più rotto.

Essendo li colori disposti in questa maniera, per conoscere il colore che risulta dalla mistura di colori qualunque dati, si deve trovare il centro di gravità delli luoghi delli colori da-

ti, e si avrà il carattere del colore composto. Per esempio, se io voglio conoscere quale colore risulterebbe dalla mescolanza di due parti di giallo in P, con tre parti di turchino semplice in Q, si deve trovare il centro di gravità 3, delli punti P, Q, cioè si conduce PQ, e si divide in 5. parti, che è la somma di 3, 2., si prende il punto 3, cioè trè parti verso P. imperocchè vi sono trè parti di turchino. e si prendono due parti verso Q, poichè vi sono due parti di colore in P. Conducendo di poi la retta, O3, che taglia la circonferenza in 1., che è tra D e E, ma più vicino di E, si vede che la mescolanza produce il verde inclinante al turchino, ma perchè il punto 3., è quasi mezzo trà il centro, e la circonferenza, il colore è poco rotto. Questa dottrina diventerà più chiara con un'altro esempio. Se io voglio conoscere il colore composto dalla mescolanza di due parti di giallo in P, tre parti di turchino in Q, e cinque parti di rosso in R, si trova primieramente il luogo 3, della mistura di giallo e di turchino come di sopra. Condotta la retta 3R; essendo cinque parti di colore in 3, e cinque parti di colore in R, essa si divide in dieci parti, e si prende il punto *r*, cinque parti lontano da R, in questa maniera il punto *r*, è il centro di gravità delli trè colori in P, Q, R, e si ha conseguentemente il luogo della mescolanza, tirando O*r*, che taglia la circonferenza in S. Onde il colore sarà arancio

cio inclinante verso il rosso, ed essendo r, più vicino al centro che alla circonferenza, il colore sarà più rotto. Si farà l'istesso per gli altri casi, sarebbe facile il determinare esattamente la distanza dal centro, ma in tali cose basta la costruzione.

Dal metodo precedente si capisce il modo di sciogliere il problema inverso, cioè, essendo dato il luogo d'un colore composto, ritrovare li colori da mescolare per produrre il colore composto dato. Sia dato il colore in 3, per il punto 3, si conduce una retta qualunque P3Q; il colore composto può essere prodotto dalla mescolanza delli colori in P, Q, prendendo la proporzione delli colori espressa per le linee 3P, 3Q, cioè prendendo del colore P in ragione di 3Q, e del colore Q in ragione di 3P. Dipoi conducendo O3, che passa per li punti 1, 2, 4, l'istesso colore può essere prodotto mescolando li colori in 2, e 4, in proporzione delle linee 4. 3. e 2. 3. overo l'istesso colore può essere prodotto rompendo il colore semplice in 1. col bianco in O, nella proporzione delle linee 3, 1. e 3. O. L'istesso s'intende per gli altri casi. Le proporzioni delli colori ora assegnate per la mescolanza delli medesimi, si riferiscono solamente alla quantità delli raggi di luce, e non alli materiali delli quali sono composti li colori artificiali. Onde se diversi colori artificiali siano mescolati secondo le regole già spiegate, e se alcuni di loro sono più oscuri, si

dovrà adoperare una proporzione maggiore di materiali più oscuri per produrre il colore proposto: imperocchè riflettono meno raggi di luce a proporzione della loro quantità, e si deve al contrario adoperare una minore proporzione di materiali più vivi, imperocchè riflettono una maggiore quantità di luce.

Se fosse perfettamente conosciuta la natura delli materiali adoperati nella pittura, talmente che si sapesse esattamente la spezie del colore, la sua perfezione, il grado di luce e d'ombra, che ha ogni materiale proporzionatamente alla sua quantità, si potrebbe colle regole precedenti produrre esattamente un colore qualunque proposto, mescolando li diversi materiali in una giusta proporzione. Ma benchè queste particolarità non possano essere sufficientemente conosciute per farne uso, oltre il tedio, e la difficoltà che si incontrarebbero nel misurare li colori secondo la loro esatta proporzione, nulladimeno questi principj possono essere di grandissimo vantaggio nella pittura. Si supponga, che un Pittore habbia sulla tavoletta diversi colori in a, b, c, d, e, per esempio in a, del minio, in b, dell'orpimento, in c, colore di garofolo, in d, dell'acqua di mare, in e, dell'azurro, e che il Pittorre debba fare del verde rotto del quale il luogo fosse in x. Considerando intorno al punto x, si vede che il detto punto non è molto lontano dalla linea che passa per c, d. Onde si conchiude che mesco-

mescolando li colori *c*, *d*, si otterrà a un dipresso il colore cercato. Ma perchè *x*, e più vicino del centro O, che la linea *cd*, avendo portato la tinta il più vicino che sia possibile della tinta cercata, per esempio in *z*. Si riguarda qualche colore opposto a *z*, traversando *x*, *z*, col quale si possa rompere la tinta, e si trova essere *a*, il più vicino. Onde mischiando del colore *a*, si ha la composizione cercata. Se il colore *a* portasse la tinta troppo oltre verso la linea OD, si mette un poco più del colore *d*, per avere il giusto luogo. Ovvero avendo la tinta *z*, si potrebbe rompere col bianco del quale il luogo è il centro O; ovvero ancora mettendo una proporzione maggiore del colore *d*, in vece di *a*, si potrebbe dopo rompere la tinta col colore *b*: Nell'istessa maniera colla sola considerazione di questo esempio, si potrà fare una tinta qualunque colli colori dati. Si vede che il rosso ed il giallo producono un'arancio rotto, il quale diventerà ancora più rotto aggiungendo il turchino, o l'indico, o il pavonazzo, che devono prendersi l'uno, o l'altro, quando si vuole avere una tinta che inclina più al giallo o al rosso, il turchino portandolo verso il giallo e rompendolo molto, il pavonazzo portandolo verso il rosso, e rompendolo meno.

Da questi principj si capisce perchè li materiali delli colori più vivi, e più semplici sono di maggior prezzo. Li colori più semplici sono

più

più ſtimabili, perchè non poſſono eſſere prodotti dalla miſtura, poichè la miſtura rompe ſempre li colori. Supponiamo *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, i colori dati, allora condotte delle linee per unire li punti, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, tutte le tinte che poſſono eſſere prodotte da queſti colori avranno il loro luogo nell'area del poligono *abcde*. Che li colori più vivi ſiano più ſtimabili delli oſcuri la raggione sì è, perchè il nero non rompe li colori come fa il bianco, talmente che ſia più facile di fare una tinta chiara oſcura, con colori vivi e neri, che di fare una luce viva con colori oſcuri, e col bianco. Imperocchè è ſtato dimoſtrato che il bianco rompe molto li colori, ma il nero non eſſendo che una privazione di luce, ſolamente li oſcura, abbenchè per cauſa dell'imperfezione delli materiali che ſono in uſo, il nero può ancora rompere un poco li colori, non eſſendovi materiale alcuno perfettamente nero, come ſi può vedere nelli più belli neri, che hanno ſempre una meſcolanza di luce, e d'ombra. Vi ſarebbero molte eccezzioni da farſi nell'applicazione di queſti principii alla pratica, per cagione delle qualità particolari delli materiali che formano li colori. Se tutti i colori foſſero come polveri ſecche le quali non produceſſero effetto alcuno l'una ſopra l'altra colla loro meſcolanza, e fermentazione, queſte oſſervazioni ſarebbero eſattiſſime nel meſcolarli. Ma alcuni colori ſono di tale natura, che eſſi producono nella

nella mefcolanza un' effetto molto diverfo da quello che fi afpettava, talmente che fia poffibile che alcuni materiali ofcuri dilavati col bianco, producano colori più chiari, e meno compofti di quel che farebbero effendo femplici. Ma tutte quefte rifleffioni meritano di effere confiderate dalli pratici dell' arte.

Benchè tutta la teoria precedente dipenda dalle fperienze di Nevvtono fopra li colori, nulladimeno non mi tratterrò a riferirle effendo defcritte in tutti i libri di buona fifica, basterà di fpiegare i limiti delli colori nell'imagine Solare. Il Nevvton avendo adoperato un prifma del quale l'angolo verticale era a un dipreffo di gradi 63. mandava l'imagine del Sole alla diftanza di 22. piedi, ed offervava la lunghezza dell'Imagine di dita $13.\frac{1}{4}$, e la lunghezza di $2:\frac{5}{8}$. Onde li centri delli cerchj efteriori che terminavano la lunghezza dell'imagine erano diftanti tra di loro di $20.\frac{5}{8}$ dita. Sia quefta imagine APCDVB (*fig.*26.) nella quale la diftanza delli centri fia XY. Si divida XY in due parti uguali nel punto H, e in tre parti nelli punti G, I. Di più fi divida XI in tre parti in E, e fi prenda KY; la quinta parte, e MY l'ottava di tutta XY. Saranno li fpazj $MY = \frac{1}{8}$, $KM = \frac{3}{40}$, $IK = \frac{2}{15}$, $HI = \frac{1}{6}$, $GH = \frac{1}{6}$, $EG = \frac{1}{9}$, $XE = \frac{2}{9}$;

L'ima-

L'imagine divisa in questa maniera essendo presentata al Sole nello sperimento del Nevvton, li colori separati occupavano li predetti spazj coll' ordine seguente, cioè, il rosso in MY, l'arancio in KM, e poi giallo, verde, turchino, indico, pavonazzo nelli spazj seguenti. Onde si vede la ragione della mentovata divisione del cerchio in $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{40}$ &c.

Nella predetta costruzione per la composizione delli colori, si deve prendere, secondo il metodo del Nevvton, il centro di gravità delle parti delli diversi colori dati, la ragione si è, che si possono considerare le azioni delli colori sull' organo della vista come forze, le quali sono in ragione delle masse, essendo uguali le velocità.

Prima di finire questo articolo rimane a spiegare una certa analogìa accennata dal Nevvton tra li colori, e li tuoni della musica. Si prolunghi XY in Z, e si faccia $YZ = YX = 1$. Poichè $MY = 1.$, sarà $MZ = \frac{1}{8} + 1. = \frac{9}{8}$, Di più $KM = \frac{1}{5}$, onde sarà $KZ = \frac{1}{5} + 1. = \frac{6}{5}$ e continuando nell'istessa maniera, si troverannо per ordine le altre distanze $IZ = \frac{4}{3}$ $HZ = \frac{3}{2}$ $GZ = \frac{5}{3}$, $FZ = \frac{16}{9}$, $XZ = 2$. Se si considera la linea XY, come una corda musicale alla quale

le si debbano riferire le divisioni MZ, KZ &c., dividendo li numeri 1. $\frac{9}{8}$, $\frac{6}{5}$ &c. per 2. Si avranno le frazioni $\frac{1}{2}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{8}{9}$ 1. Le quali riferite alla corda XZ, come tuono principale esprimeranno nel primo rango un *tuono maggiore*; di poi per ordine li tuoni seguenti, una *terza minore*, una *quarta*, una *quinta*, una *sesta maggiore*, una *settima*, un'*ottava*. Per evitare le frazioni si potrebbe considerare XZ, come un *monocordo*, del quale la lunghezza fosse 360. e le divisioni armoniche fossero 320. 300. 270. 240. 216. 202. $\frac{1}{2}$, 180. li quali numeri hanno tra di loro la medesima proporzione, che le frazioni precedenti. Queste divisioni esprimono li gradi dell'ottava: *sol*, *la*, *fa*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, seguitando, come ha fatto Nevvtono, la scala di Guido Aretino; ovvero li gradi *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *ut*, *re*, riducendo la scala antica alla moderna; nella quale serie di tuoni, li colori arancio, e indico corrispondono a due mezzi tuoni, cioè, l'arancio all'intervallo del *mi*, al *fa*, e l'indico all'intervallo del *si*, a *ut*. Da questa breve spiegazione si vede, che li spazj delli colori non corrispondono alle note musicali, ma solamente li intervalli dell'imagine Solare riferiti alla lunghezza del monocordo. Onde si vede che l'analogia tra li suoni, e li colori non è affatto esatta.

ta. Si potrebbero aggiungere molte altre ragioni intorno all'imperfezione della medeſima analogia; ma queſto argomento non appartiene al noſtro propoſito, ſi può leggere quel, che ne ha ſcritto il Signor De Mairan celebre fiſico e matematico nelle memorie dell' Academia di Parigi negli anni 1727, e 1738. Credo che il Nevvton abbia cercato con premura qualche corriſpondenza maggiore tra li ſuoni, e li colori; e da queſta cagione mi perſuado eſſere derivata la diviſione, che egli fa del cerchio in ſette parti proporzionali alli numeri $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{9}$, li quali numeri corriſpondono nell'antica ſcala alli ſette tuoni muſicali, *ſol*, *la*, *fa*, *ſol*, *la*, *mi*, *fa*, *ſol*.

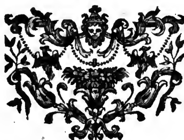
Queſta diviſione adoperata dal Nevvton per la compoſizione delli colori *lib.* 1. *dell' ottica part.*2. *prop.*6. è diverſa da quella, che ſi è meſsa quì sù alla pag.69. Quella il Nevvton non la mette in niun luogo eſpreſſamente per la diviſione del circolo, e compoſizione de' colori; ma da molti luoghi tanto dell' ottica, quanto delle lezioni ottiche eſſa ſi raccoglie facilmente per l'imagine ſolare, ove ſi vogliano eſprimere gli ſpazj, che ivi pigliano i diverſi colori. Se ſi rifletta a varj paſſi di queſte ſue opere, e ſi badi alla analogia de' colori compoſti colle forze compoſte accennata quì sù alla pag.76, ſi può inferire, che inerendo alla diviſione della imagine ſolare da lui abbrac-

abbracciata, anche quì per li colori composti convenga il dividere il circolo nella suddetta maniera della pag.69. Se il Nevvton non l' ha quì abbracciata, e ne ha sostituita un'altra, mi persuado, che non l'abbia fatto senza qualche apparenza di ragione, che credo sia stata una maggiore analogia tra li colori, e il suono; tanto più, che nell'una, e nell'altra maniera i colori composti vengono assai poco diversi, e che nelle lezioni ottiche si mostra alquanto irresoluto sulla precisa divisione della stessa solare imagine, mentre dice: *Cæterum hæc non adeo præcise observare potui, quin & fateri cogar, ea posse paulo aliter fortasse constitui*; anzi proponendo due diverse divisioni soggiunge; *superiorem vero distributionem potius adhibui, non tantum, quod cum phœnomenis optime convenit, sed quod fortasse aliquid circa colorum harmonias, qualium pictores non penitus ignari sunt, sed ipse nondum satis perspectas habeo, sonorum concordantiis fortasse analogas involvat*.

Su questa materia si può vedere la bellissima dissertazione *De Lumine* del dottissimo P. Boscovich, e mio amicissimo, il quale nella seconda parte di essa ha varie nuove, e profonde ricerche, anche su questo istesso argomento della divisione del cerchio per la composizione de' colori, e vi ha introdotta questa mutazione medesima.

Io già ho spiegato la composizione delli colori; per altro chi vorrà ridurre in pratica la

la coſtruzione precedente con maggiore eſattezza, dovrà conoſcere la degradazione delli colori, e il loro ſito nell'imagine Solare. Benchè nelle ſperienze del Priſma non ſi contino volgarmente che ſette colori, perchè preſi aſſieme ſono inſeparabili, nulladimeno le oſſervazioni fatte con arte ne dimoſtrano molti più. Facendo paſsare con lentezza un'imagine Solare ben pura ſopra un filo bianco, io ho oſservato nelli diverſi intervalli più di quindici gradi di colori d'una differenza ſenſibiliſſima alli miei occhj. Molti altri hanno provato l'iſteſſo. Onde è evidente, che per comporre più perfettamente un colore dato, devono eſsere conoſciuti con eſatta ſperienza i luoghi delli gradi diverſi negli intervalli delli colori primarj.



NUM.

NUM. III.

Esame d' un principio di Perspettiva.

E' Principio universale di Perspettiva, che gli oggetti veduti sotto angoli uguali compariscono uguali. Da questo assioma dipende il secondo teorema della Perspettiva, nel quale si è dimostrato, che le projezioni scenografiche rappresentano gli oggetti reali. Ed in fatti, essendo uguale l'angolo ottico, cioè l'imagine formata nell' occhio dalli raggi estremi dell'oggetto, per lo più gli oggetti appariscono uguali benchè disugualissimi. Se passeggiando in un viale di alberi consideriamo la parte del Cielo compresa tra i medesimi, essa ci comparirà uguale all'intervallo dello stesso viale, essendo uguale l'angolo apparente. Ma questo principio patisce qualche eccezione; o per dir meglio, ha bisogno di qualche spiegazione.

La grandezza apparente degli oggetti dipende da molte circostanze. E' certo che acquistiamo coll' uso un' idea più esatta delle grandezze reali; per esempio, considerando una fila di Soldati, il più vicino dovrebbe comparire più grande dell'ultimo; ma perchè sappiamo che l'ultimo è un Soldato come è il primo, abbiamo imparato colla sperienza a correggere questo giudizio delli nostri occhj, e ci rappresentiamo l'ultimo Soldato come della medesima altezza del primo. Questo

giudizio non vale nelle diſtanze troppo grandi ; o nelle direzioni che non ſono familiari. Imperocchè in queſte ſorte di diſtanze e di direzioni non abbiamo la ſperienza, e conſeguentemente non potiamo coll'ajuto della medeſima riformare l'apparenza degli oggetti. Il penſiere di paragonare le grandezze apparenti e reali eſſendo derivato dal miſurare le grandezze reali o col camminare, o colle mani, queſte ſperienze non poſſono avere luogo nelle diſtanze verticali, le noſtre miſure per lo più eſſendo fatte in direzioni orizontali. Per lo contrario ſappiamo riformare le grandezze apparenti, quando gli oggetti poſſono eſſere ſoggetti a frequenti ſperienze o oſſervazioni. Per eſempio, li mattoni quadrati d'un pavimento ci compariſcono quadrati, benchè ſecondo le leggi medeſime della perſpettiva ſieno rappreſentati all'occhio con figure molto diverſe; abbiamo coll'uſo e colla ſperienza conoſciuto la figura reale di queſti mattoni, e rettifichiamo la grandezza apparente di eſſi.

Il celebre Signor Perrault nell'architettura del Vitruvio combatte l'opinione ricevuta dagli Architetti e Scultori, cioè, che le Statue alzate nella cima delle fabbriche debbano eſſere più groſſe, e ſcolpite con maggiore franchezza e libertà che le Statue vicine. Il lodato Autore ſi appoggia ſu queſta ragione, che l'occhio eſſendo avvezzo alle diſtanze, il noſtro giudizio è così perfetto che un' oggetto pare dell'iſteſſa grandezza, o ſia poſto in una maggiore o minore diſtanza. E chiaro dalle

dalle rifleſſioni precedenti, che il Perrault non fa un'applicazione giuſta delli ſudetti principj, poichè le Statue poſte ſopra alti edifizj non ſono una coſa così familiare e commune, che ogn'uno poſſa ſubito emendare il giudizio degli occhj. Vediamo per ſperienza, che pochiſſimi ſpettatori giudicano dell'altezza delle Statue poſte nella facciata della Chieſa di S. Pietro, ſe non le hanno prima conſiderate da vicino. Nè pare meglio fondato l'iſteſſo Autore nel criticare la celebre Storia della Statua di Minerva lavorata dal Phidia, la quale era moſtruoſa viſta da vicino, ma era d'una bellezza ſorprendente conſiderata in una giuſta diſtanza. Si oſſerva il medeſimo ogni giorno in molte pitture, le quali da vicino pajono toccate groſſamente, ma ſi vedono in una convenevole diſtanza perfettamente finite.

Che la ſperienza che noi abbiamo delle diſtanze contribuiſca molto alla grandezza apparente degli oggetti è evidente da molte oſſervazioni. Ha oſſervato ogn'uno, che in una vaſta campagna le caſe che ſi credevano vicine, erano molto diſtanti. Imperocchè eſſendo avvezzi a giudicare della diſtanza per la ſerie degli oggetti frapoſti, crediamo vicine le caſe benchè lontane, quando vi ſono pochi oggetti interpoſti, come accade in una nuda campagna. Da queſta ſteſſa ragione viene in parte, che il Sole nell'Orizonte compariſce più diſtante che nel meridiano, eſſendo nel primo caſo un maggiore numero di oggetti terreſtri medii. Onde giudichiamo ancora il Sole

molto maggiore nell'Orizonte che nel meridiano. E' una ſperienza coſtante delli viandanti, che di notte tempo, o ſul fare del giorno gli oggetti vicini, come gli alberi e le caſe, ſi credono molto maggiori e più diſtanti. La cagione di queſto inganno può eſſere, che non diſtinguendo per l'oſcurità del Cielo la Terra frapoſta, queſti oggetti ſi riferiſcono alla parte più luminoſa dell'Orizonte. Onde accreſcendo la diſtanza, ſi accreſce ancora la grandezza.

Giudichiamo anche delle grandezze per paragone. Se conſideriamo gli oggetti in una valle formata da alte montagne, queſti oggetti compariranno ſtraordinariamente piccoli. Queſto errore proviene dalla cagione già accennata, poichè la grandezza apparente delli oggetti grandi e lontani, è la medeſima che la grandezza apparente degli oggetti piccoli e vicini.

Il giudizio che ſi fa delle diſtanze, e conſeguentemente delle grandezze può eſſere ſoggetto a molti inganni per cagione della maggiore o minore luce. Se nella notte alcuni oggetti ſono più illuminati, li crediamo più vicini, e forſe da queſta origine coll'ajuto della fantaſia potrebbe naſcere la rappreſentazione di alcuni fantaſmi, i quali ſvaniſcono da vicino.

Qualunqne ſia la cagione di queſti giudizj diverſi, pare certo che l'angolo apparente non è ſempre la miſura della grandezza apparente. Ma gli errori che derivano da varie circoſtanze non alterano la verità del principio di perſpettiva.

tiva. Resta sempre evidente, che l'imagine dell'oggetto dipinta nel fondo dell'occhio è proporzionale all'angolo sotto il quale si vede l'oggetto. Di più si potrebbe ricevere questo principio con qualche limitazione, cioè nei casi, nelli quali la distanza apparente è la medesima, e tutte le circostanze rimangono uguali. Finalmente l'arte della perspettiva non consiste solamente nella projezione scenografica degli oggetti, ma ancora sono necessarie tutte quelle degradazioni di ombre e di colori che formano la perspettiva chiamata *aerea*. Da questa giusta distribuzione di tinte sono prodotte nel dipignere li paesi quelle lontananze che fanno il merito principale di questo genere di pittura.

E' evidente, che il principio già esaminato è unito con quello delle distanze. Si stabilisce communemente, che le grandezze apparenti sono in ragione reciproca delle distanze, la quale cosa non si deve intendere generalmente. Imperocchè è dimostrato, che nelle piccole distanze le grandezze apparenti decrescono meno che nella proporzione delle distanze medesime. Ma se gli angoli ottici sono molto piccoli, si può considerare in questo caso la grandezza apparente in ragione reciproca delle distanze, come è chiaro dagli elementi di geometria. In oltre quest'istesso principio patisce la medesima difficoltà del primo. E' stato già osservato, che l'estimazione delle distanze dipende dalla serie degli oggetti frapposti. Il nostro occhio non potendo abbracciare assieme

che un piccolo numero di oggetti, non può distinguere in una distanza troppo grande tutti li oggetti interposti, e perciò è soggetto a errore nello stimare le grandi distanze. Di più li oggetti lontani dipingono nell'occhio un'imagine ben piccola, e fanno un'impressione troppo debole sull'organo della vista, onde le distanze apparenti sono ristrette in angusti limiti. Da questa cagione deriva, che due oggetti molto distanti sono giudicati essere alla medesima distanza apparente, benchè la disuguaglianza sia immensa, come accade nel Sole e nella Luna, essendo il Sole distante da noi di 11000 diametri della Terra, e la Luna solamente di 60. Dalla medesima ragione dipende in parte la concavità apparente del Cielo, essendo li corpi celesti in grandissime distanze, la differenza delle quali è affatto insensibile ai nostri occhj.

Dopo avere esaminato il principio universale di perspettiva, ora non sarà fuori di proposito il considerare brevemente alcune conseguenze del medesimo. Le linee parallele, come ABC, DEF (*fig.*27.) riguardate obliquamente pajono convergenti. Imperocchè decresce sempre più la grandezza apparente degli intervalli perpendicolari AD, BM, CF &c., e conseguentemente le linee parallele sembrano convergere verso la linea imaginaria, condotta dall'occhio parallela alle medesime. Onde l'occhio essendo supposto in O, e alzato sul piano orizontale ABC, il detto piano deve comparire alzarsi per gradi verso OG; e al contra-

contrario se l'occhio sta sotto il piano DF, il medesimo piano comparirà abbassarsi. Benchè la superficie del mare sia convessa, nulladimeno la porzione di mare sensibile alli nostri occhj comparirebbe piana, se la detta ragione ottica non accrescesse la sua convessità apparente. Per questa medesima cagione la sommità degli alti edifizj comparisce inclinata verso l'orizonte; poichè fingendo tirata per l'occhio una perpendicolare all'orizonte, e parallella all'altezza dell'edifizio, le parti le più alte dell'edifizio convergeranno in apparenza verso questa perpendicolare imaginaria. Onde è ignoranza di alcuni che attribuiscono a un'errore dell'artefice quel che è effetto dell'arte.

Se si volesse trovare la curva, nella quale bisognasse disporre una lunga serie di oggetti, talmente che l'occhio alzato sopra il piano orizontale, li vedesse tutti ugualmente distanti, cioè sotto un medesimo angolo apparente, il problema sarebbe facilissimo. Imperocchè sia AD la retta nella quale siano costituiti li due primi oggetti A, D. Sia l'occhio in O, del quale l'altezza perpendicolare sia OQ. Sia QG la linea di mezzo, alla quale dal punto O si conducano le rette OD, OM. E' evidente per le condizioni del problema, che gli angoli AXD, AYM essendo uguali, li triangoli rettangoli XOD, OYM saranno simili. Onde facendo YM $= y$, XY $= x$, OQ $= f$, OX $= a$. QX $=$ O, XD $= b$, sarà YM (y) : OY $\sqrt{ff + gg + 2gx + xx}$ $=$ XD (b): OX (a): e si

avrà l'equazione $aayy = bb \times ff + gg + 2gx + xx$, che è un' equazione all' iperbola. Perciò disponendo una serie di alberi, o di colonne, secondo il perimetro di due iperbole, questi oggetti sarebbero rappresentati all'occhio come posti in due rette parallele. Il problema sarebbe poco più difficile in un'altra ipotesi qualunque delle grandezze apparenti. Onde non mi trattengo a discorrerne più diffusamente. Si può vedere quel che ne ha scritto il Signore Varignon nelle memorie dell'Academia di Parigi del 1717. E' della medesimà natura il problema sciolto dal Sig.Pitot nelle memorie citate dell'anno 1734., nel quale problema, essendo dati quattro punti, cerca un quinto punto, dal quale alli quattro punti dati conducendo delle linee, li tre angoli così formati siano uguali, o in qualunque ragione data. Non devo omettere la riflessione fatta dal Signor Varignon nel luogo già detto, ove quel celebre Geometra esaminando il principio delle grandezze apparenti in ragione composta degli angoli apparenti, e delle distanze ne ricava quell'inconveniente, che disponendo una serie di oggetti in una retta, si debba disporre l'altra serie opposta in una curva convergente verso la retta, per avere il parallelismo apparente dell'una e dell'altra serie; cosa affatto incompatibile col parallelismo cercato, e che dimostrerebbe l'impossibilità dell'ipotesi.

Per rispondere a questa difficoltà basta riflettere, che le apparenze dipendenti dalla sperienza,

e che

e che ſono effetti della noſtra imaginazione, non ſi poſſono eſaminare col calcolo. Benchè due muraglie parallele, per eſempio, compariſcano convergere realmente, le giudichiamo parallele per ragione d'una ſperienza antecedente, e corregiamo l'errore degli noſtri occhi; ma ſe le muraglie convergono, compariranno veramente convergenti; imperocchè non abbiamo ragione ottica di paralleliſmo, gli angoli apparenti non eſſendo uguali, nè ragione di ſperienza, poichè la ſperienza dimoſtra il contrario. Onde in tali coſe che dipendono dal giudizio della noſtra mente, e da molte circoſtanze variabili di ſopra accennate, non pare che poſſano avere luogo le ſublimi ricerche analitiche.



NUM. IV.

NUM. IV.

Delle projezioni deformi, chiamate Anamorfosi.

NElla perſpettiva volgare il piano di projezione ſi ſuppone tra l'occhio e l'oggetto; ma nel genere di projezione che ora mi propongo di conſiderare, l'oggetto è ſuppoſto tra l'occhio ed il piano di projezione. Le coſtruzioni dimoſtrate nella perſpettiva precedente, non eſſendo limitate ad alcuna poſizione determinata de' piani, potranno ancora adoperarſi in queſto caſo particolare, come ſarà evidente dalle propoſizioni ſeguenti.

PROBL. I.

Eſſendo diviſo il parallelogrammo rettangolo ABCD in un numero qualunque di piccoli parallelogrammi, e poſta la baſe AB del parallelogrammo ſopra la linea AB d'un piano, al quale il detto parallelogrammo ſia perpendicolare, ritrovare la proiezione del parallelogrammo, e delle ſue diviſioni ſul piano dato, eſſendo dato il punto di veduta.

Dal punto di veduta O (*fig.*28.) ſi conduca la perpendicolare RO, che ſarà la diſtanza del quadro. Per i punti di diviſione della baſe ſiano condotte le rette RA*d*, RB*c* &c. Si faccia AD ugua-

uguale all'altezza del parallelogrammo, e si prenda RI uguale alla distanza del quadro, e siano ambedue le linee perpendicolari ad RA. Dal punto I per le estremità, e divisioni di AD si tirino ID*d*, IF*f* &c. che tagliano RA prolungata, nelli punti *d*, *f*, *m* &c. per i quali si conducano le linee *dc*, *fe*, *ml* &c. parallele ad AB. Il trapezio AB*cd* così diviso in piccoli parallelogrammi sarà la projezione cercata.

D I M.

Si concepisca, come nel probl. 1. della perspettiva, il piano del triangolo RI*d* rivolgersi intorno alla linea RA*d*, finchè diventi perpendicolare al piano del quadro. Allora il punto I coincide con O, e li punti A, *m*, *f*, *d* &c. saranno le projezioni delli punti A, M, F, D &c. Per la medesima ragione, le linee condotte dal punto R alle divisioni della base saranno le projezioni delle linee perpendicolari ad AB, e le linee *dc*, *fe* &c. saranno le projezioni delle linee DC, FE &c. (*cor.* 1. *teor.* 4.)

L'istesso problema si può facilmente costruire in un'altra maniera colla projezione delle linee DC, FE &c. parallele al quadro (*cor.* 3. *del teor. citato*.)

Cor. 1. Se il parallelogrammo ADCB si riducesse al quadrato AFEB, è evidente, che essendo FB la diagonale di tutti i piccoli quadrati, sarebbe ancora B*f* la diagonale di tutte le loro projezioni.

Simil-

Similmente *ld* farebbe la diagonale di tutte le projezioni del quadrato LMDC.

Cor. Da questo problema si ricava il metodo delle *Anamorfosi* che consiste nel disegnare una pittura, la quale comparisce difforme veduta direttamente, ma acquista una giusta proporzione, quando è riguardata da un certo punto. Si descrive un parallelogrammo, o un quadrato intorno a una pittura originale, e si divide in molti piccoli quadrati. Di poi avendo diviso un'altro quadrato ABEF d'un lato qualunque, nel medesimo numero di piccoli quadrati, si trova la sua projezione AB*ef*, e si trasferiscono li lineamenti, e li colori di ciaschedun quadrato della pittura originale nelli trapezj corrispondenti della projezione AB*ef*. E evidente che la pittura difformata comparirà riformata all'occhio in O; poichè l'imagine di tutta la pittura, e di tutte le sue parti nell'occhio, e l'istessa, come se i raggi fossero venuti all'occhio originalmente dalla pittura regolare disegnata in miniatura nel quadrato ABEF, posto perpendicolarmente sopra la base AB. Per maggiore inganno delli spettatori si sogliono ornare con arte queste sorte di projezioni di varj disegni, i quali anche veduti direttamente facciano illusione agli occhi. Cresce l'inganno ottico, se queste trasformazioni sono riguardate con un piccolo tubo o a traverso un buco, per sottrarre agli occhi gli oggetti frapposti, e nascondere la distanza.

PROBL.

PROBL. II.

Disegnare in un piano una copia difforme d'un originale, la quale riflessa dalla superficie d'un cilindro comparisca regolare all'occhio in O.

Dal punto O, si abbassi la perpendicolare OR, (*fig*.29.) e si conducano le due linee R*a*, R*e*, le quali possono essere tangenti, o secanti del circolo *lnp* base del cilindro, secondo la maggiore, o minore deformità, che si vuole dare alla figura. Sopra la base *ae*, alzando un parallelogrammo o un quadrato si trovi la sua projezione, *aekf*, come nel problema precedente; tolto il cilindro, la figura veduta dal punto O, comparirebbe regolare. Ma nel caso di questo problema, li raggi essendo intercetti dalla superficie del cilindro, e conseguentemente riflesi dalla medesima, si devono cercare questi raggi riflessi, facendo, secondo le leggi di ottica, l'angolo di riflessione uguale all'angolo d'incidenza. Perciò considerando li raggi R*lf*, R*mg* &c. come partendo dal foco R, e riflessi dalla base, *lmnp*, si tirino li raggi riflessi, *l* F, *m* G &c. talmente che prolungando il raggio riflesso ed il raggio incidente, essi taglino segmenti uguali del cerchio. Finalmente si trasferiscono le linee *l*A*f*, *mbg* &c. con tutte le loro parti sopra le linee rispettive *l*AF, *m*BG &c. per i punti ABCDE, FGHIK, e per gli altri punti intermedii si facciano passare gli archi di curva, come ABCDE, la figura ACEKHF, così divisa comparirà

rirà regolare nella ſuperficie del cilindro veduta dal punto O. E' evidente che la coſtruzione ſarebbe la medeſima, ſe l'arco, *lmnop*, foſſe concavo, cioè, ſe la ſuperficie riflettente del cilindro foſſe concava.

D I M.

Poichè le linee, *af*, *bg* &c. con tutte le altre diviſioni del trapezio, *aefk*, ſono le projezioni del parallelogrammo poſto in, *ae*, e le linee AF, BG &c. ſono per coſtruzione, le medeſime projezioni rifleſſe dal cilindro, è evidente che il piano della figura AFHKE, rappreſenta il parallelogrammo trasformato, e rifleſſo dalla ſuperficie del cilindro nel piano EGHK. Onde ſiccome il trapezio *afke*, veduto dal punto O, produce un'imagine regolare; così ancora la projezione irregolare AFHKE rifleſſa all'occhio in O, deve fare l'iſteſſa impreſſione, come ſe i raggi partiſſero direttamente dalle linee del trapezio, o dalle linee del parallelogrammo, cioè l'imagine deve comparire regolare, e colle ſue giuſte proporzioni. La dimoſtrazione ſarebbe l'iſteſſa nel caſo della concavità.

Cor. 1 Poichè la baſe d'un cono è un circolo, li raggi rifleſſi dalla ſuperficie conica ſi determineranno come nella ſuperficie cilindrica. Onde ſi vede il modo di fare una trasformazione, la quale appariſca regolare veduta in una ſuperficie conica, o conveſſa, o concava.

Cor.

Cor.2. Le ombre delle figure essendo le projezioni scenografiche delle medesime, (*Def.5. della perspettiva*) si potrà con un metodo puramente meccanico e facile trasformare una figura qualunque in una superficie convessa, o concava, o in qualunque modo irregolare. Si alzi perpendicolarmente sopra un piano l'oggetto da trasformare, dietro al quale si ponga una candela accesa, talmente che l'ombra dell'oggetto cada sulla superficie data. L'ombra e conseguentemente la projezione tanto sarà più grande e difforme, quanto più vicina sarà la candela e meno alta sul piano di projezione. Dipoi si segnino nell'ombra li lineamenti e li colori.si avrà la trasformazione dell'oggetto, il quale comparirà riformato, ponendo l'occhio nel luogo della candela. Se si piccano con un'ago li principali lineamenti dell'immagine, in vece dell'ombra si avranno varj punti luminosi li quali segnati colli colori loro proprii rappresenteranno l'immagine riformata all'occhio posto nel sito della candela. Si deve osservare che i raggi solari non sono a proposito in questo caso, poichè essendo paralleli non convengono nel punto ove si suppone l'occhio.

Cor.3. Questi problemi si possono anche costruire per mezzo delle curve, che sono chiamate dalli Geometri *caustiche per riflessione*. Sia il circolo ABCD (*fig.30.*), la base d'un cilindro o una sezione del medesimo parallela alla base, e che passa per l'occhio O. Sia nel piano di questa base la linea *prt*, dell'imagine trasformata (*per il probl.*

probl.3.) la curva, *oabgd*, sia la caustica per riflessione delli raggi che partono dal punto O, overo dall'occhio, e per li punti *a*, *b*, *g*, *d* &c. si tirino le rette P*a*. R*b* &c. che siano tangenti della curva e secanti del cerchio riflettente in A, B, C, D, &c.. Siano condotte le rette OA, OB, OC &c., e si faccia AP = A*p*, B*r* = BR &c.. La linea PRT, riflessa dalla superficie del cilindro comparirà come se fosse veduta direttamente coll'occhio in O, tolto il cilindro. L'istesso s'intende di qualunque altra linea dell'imagine trasformata, la quale conseguentemente apparirà tutta regolare veduta dal punto O. E' chiaro dalla costruzione, che senza descrivere la caustica basterebbe condurre il raggio OB e la sua riflessione BR, che taglia PX, in qualche punto R, e fare B*r*=BR &c. il problema inverso si costruirebbe coll'istessa maniera, cioè, data la riflessione in X, T, R, si troverebbe l'immagine diretta, *p*, *r*, *t* &c.

*Scol.*1. Poichè nel corollario precedente ho fatto menzione dalle caustiche per riflessione, non sarà fuori di proposito il considerare brevemente la natura di queste curve. Se infiniti raggi incidenti come AB, AB &c. (*fig.*31.) che stanno tutti nel medesimo piano d'incidenza, non tendono al medesimo punto dopo la loro ultima riflessione, ma si interfecano in un numero infinito di punti, la curva della quale sono tangenti tutti questi raggi si dice: *caustica per riflessione*, e verrebbe chiamata: *caustica per rifrazione*, se li raggi fossero rifratti; ma questa ultima spezie di curva benchè sogget-

soggetta alla medesima teorìa, non appartiene al presente trattato. Se due tangenti BF, BF si intersecano nel punto G avvicinandosi l'una all'altra, finchè coincidano, si accosteranno ancora li punti di contatto e d'interfezione, e finalmente coincideranno. Onde è evidente che li raggi riflessi sono tangenti della caustica in quel punto del raggio, ove la sua interfezione col raggio prossimo svanisce. Perciò se si concepiscono due raggi incidenti infinitamente vicini moversi intorno al punto A, nel piano d'incidenza, il punto F interfezione delli raggi riflessi sarà alla caustica, la quale è chiamata o reale, o imaginaria secondo che li raggi riflessi sono convergenti o divergenti. Per dare una notizia esatta delle caustiche per riflessione, si deve primieramente considerare la riflessione delli raggi in una superficie piana. Questi raggi riflessi prolungati concorrono in un punto, il quale si trova conducendo dal punto luminoso una perpendicolare alla superficie piana, e prolungando la detta perpendicolare finchè la parte prolungata sia uguale alla perpendicolare medesima. L'estremità della parte prolungata sarà il punto cercato. Si suole considerare nella geometria infinitesimale una porzione di curva infinitamente piccola come una linea retta della quale la tangente sia un prolungamento. Supponiamo dunque un lato infinitesimo di curva prolungato in tangente, e immaginiamo due raggi infinitamente vicini che cadono sopra questo lato, parerebbe agli uomini poco intelligenti del metodo infinitesimale, che

G per

per trovare il punto di concorso delli raggi riflessi, bastasse condurre dal punto luminoso una perpendicolare a questa tangente, e prolungarla come si fa nella superficie piana:

Ma è certo che l'estremità di questa perpendicolare prolungata non è un punto della caustica; imperocchè considerando una piccola porzione di curva come retta, bisognerebbe che le perpendicolari alla curva condotte alle due estremità del lato infinitesimo fossero esattamente parallele, come lo sarebbero, se la superficie fosse retta. Il contrario è evidente, poichè le perpendicolari concorrono a una certa distanza, e col loro concorso formano il raggio detto dell'*Evoluta*. Dunque è necessario di considerare la posizione di queste perpendicolari concorrenti, per determinare la posizione delli raggi riflessi, e conseguentemente il punto di concorso il quale in questo caso è tutto altro che nella superficie retta. Considerando una curva come un poligono, le perpendicolari alla curva non devono essere perpendicolari alli lati della medesima, ma dividono ugualmente l'angolo infinitamente ottuso formato dalli lati infinitesimi, altrimente nel punto di concorso delli due lati vi sarebbero due perpendicolari, una per ciaschedun lato, la quale cosa è impossibile, non essendo che una perpendicolare ad ogni punto di curva. Dunque li raggi incidenti e riflessi devono fare colla perpendicolare angoli uguali.

Essen-

Essendo premesse queste osservazioni; Sia S un punto luminoso (*fig.*32.) overo il foco delli raggi incidenti, PL*p* la tangente in L, sia LC, il raggio dell'evoluta in L, L*m* il raggio riflesso talmente che l'angolo CLM sia uguale a CL*s*. Allora se li raggi riflessi sono sempre tangenti della curva *bme*, essa sarà la caustica per riflessione.

Sia SP la perdendicolare alla tangente LP che incontra sempre la curva DP in qualche punto P, e sia la curva DP l'evoluta di HME, della quale PM, sia tangente in M. Si conduca SM e si prolunghi in, *m*, finchè S*m*, sia uguale a 2SM sarà *m* un punto alla caustica della curva BL. Imperocchè essendo, MP perpendicolare alla curva DP, sarà l'angolo MPS uguale al complemento di, SLP, cioè a LSP, per il metodo delle tangenti, e sarà SL divisa ugualmente in K. Onde S*m*: SM = SL: SK; e L*m*, sarà parallela a KM tangente di HME. Ma la figura, *bme*, e simile a HME e similmente posta, perciò L*m* è tangente di *bme*. Di più essendo L*m*, parallela a PM, l'angolo *m*LC = MPS = LSP = CLS. Onde essendo SL raggio incidente, sarà *lm* raggio riflesso, e il punto *m* sarà alla caustica.

Si prenda L*s* sopra il raggio riflesso = LS; dal punto C si conduca CR perpendicolare al raggio LS, e sia L*q* = *q*R, saranno *qs*, *q*R, *qm* in proporzione continua, poichè sono in proporzione continua *sq*, *s*L, 2PM (*per la teoria delle evolute*). Sia CI perpendicolare a SL in I, e si divida IL ugualmente in Q, essendo S della parte

concava; e LS maggiore di LQ, farà PM = PK (SK) + KM, e 2PM = sL + Lm. Onde sq : qL (qR) = sL : Lm = qR : qm. Ma essendo S tra Q e L, allora 2PM è uguale alla differenza di Lm, Ls, e Sq : qL = SL : Lm = qL (qR) : qm. Si vede nell'istessa maniera che essendo S della parte convessa della curva, sono sq, qR (qL), qm in proporzione continua. Se il raggio incidente sia perpendicolare alla curva, coincide col raggio riflesso, s cade in S, C in R e qm, qS sono in proporzione continua. generalmente $sq \times qm = qR^2 = qL^2$, e li raggi incidenti essendo paralleli coincidono li punti m, q, e $ml = \frac{1}{2}$ LR. Se LS = $\frac{1}{2}$ LI, essendo S nella parte concava della curva, coincidono s, q, e il raggio riflesso Lm diventa asintoto della caustica.

Da questi elementi si può facilmente ricavare l'espressione analitica. Imperocchè sia SL = r, SP = p, si avrà $Lq = \frac{pdr}{2dp}$ Onde $Lm : SL = \frac{pdr}{2dp} : -r + \frac{pdr}{2dp}$. Essendo data l'equazione della curva LB, sarà data la ragione di SL a SP espressa per qualche funzione delle coordinate, e perciò col calcolo infinitesimale si potrà trovare la caustica, e al contrario data la caustica si troverà la curva di riflessione.

Scol. 2. Dall'espressione precedente si ricavano facilmente le formole analitiche date dal Bernoulli, e dal Marchese dell' Hospital. Sia $r = y$ l'archetto del cerchio descritto col raggio y, $= dx$

$= dx$ l'elemento dell'arco ds, si avrà $p = \frac{ydx}{ds}$,

$dp = dydxds - \frac{ydxdds}{ds^2} = dydxds - \frac{ydxdyddy}{ds^3}$.

Onde $Lm = \frac{prdr}{2rdp + pdr} = \frac{y^2\,dydx}{ds}$:

$(2ydydxds - 2y^2dxdds + ydydxds)$

$= \frac{y(dx^2 + dx^2)}{(2+1)(dx^2 + dy^2) - 2yddy}$, nella quale formola si suppone dx costante. Se li raggi incidenti sono paralleli, essendo $Lm = \frac{1}{2}LR = \frac{pdr}{2dp}$ la formola precedente si muta in questa $Lm =$ $ydyds^2 : 2dyds^2 - 2ydyddy = \frac{ds^2}{-2ddy}$, poichè essendo in questo caso y infinita, svanisce la quantità $2dyds^2$. Per esempio nella parabola essendo $y = \sqrt{ax}$, sarà $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, $dy^2 = \frac{adx^2}{4xx}$, $ddy = -\frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}}$; onde $\frac{ds^2}{-2ddy} = \frac{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}{2a} = lm$.

Sarà ancora facile il determinare l'intersezione del raggio riflesso coll'asse della curva. Imperocchè sia AMD (*fg.* 33.) una curva qualunque, il raggio incidente PM sia perpendicolare all'asse, QM perpendicolare alla cur-

curva, ſi avrà MP : MO $=$ PQ : OQ, cioè, eſſendo PQ $= \frac{ydy}{dx}$, ed il triangolo MPO eſſendo rettangolo, ſarà MO $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2}$. Onde ſi ricaverà ancora PO $= \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2}$. Finalmente per ritrovare le coordinate AR, FR della cauſtica, ſi cerca per la ſimilitudine delli triangoli MPO, MSF la retta PR $= \frac{dxdy}{-ddy}$ e ſi avrà FR $=$ MP $-$ SP $= y + \frac{dy^2 - dx^2}{-2ddy}$, e AR $= x + \frac{dxdy}{-ddy}$. Dunque eſſendo data l'equazione alla curva AMD ſi ſcacciano l'incognite x, y, e reſta l'equazione tra le coordinate AR, RF della curva cercata. Sia RF $= z$, AR $= u$, ſarà nella parabola $z = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$, e alzando al quadrato $zz = \frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3$. Di più $u = 3x$; onde ſi ha l'equazione della cauſtica $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau$.

Da queſti medeſimi principii ſi potrebbe ancora determinare la curva che rifletteſſe li raggi ſecon-

secondo una condizione data. Imperocchè essendo $PQ = \frac{ydy}{dx}$, sostituendo il valore della sottonormale PQ, secondo le condizioni del problema, si avrà un'equazione differenziale, l'integrale della quale esprimerà l'equazione della curva. Se per esempio si cercasse la curva, la quale ricevendo li raggi paralleli al suo asse, li riunisse in un dato punto. Sia NM il raggio incidente, $AP = x$, $PM = y$, la sottonormale $PQ = s$. Sia ML il raggio riflesso, $AL = z$, sarà $LQ = s + x - z$. Di più $LM^2 = \sqrt{\overline{z-x}^2 + y^2}$. Ma $LM \times MO = LQ \times QO$, cioè, essendo in questo caso MN infinito $= QO$, sarà $LM = LQ$. Onde si avrà $s + x - z = \sqrt{+\overline{z-x}^2 + y^2}$, e quadrando $s^2 + 2sx - 2sz = y^2$. Ora in vece di s si sostituisca il valore $\frac{ydy}{dx}$, si avrà l'equazione $ydy^2 + 2xdxdy - 2zdxdy = ydx^2$, la quale integrata darà $x = \frac{y^2}{4z}$, ovvero $4zx = y^2$, che è la proprietà della parabola, nella quale il lato retto è uguale a 4AL.

PROBL. III.

Data l'anamorfosi ritrovare la parte della medesima visibile all'occhio in una qualunque posizione data, nella superficie d'un cilindro, o d'un cono, o anche d'un altro solido qualunque di rivoluzione.

E' evidente che la superficie d'un solido qualunque di rivoluzione può considerarsi come composto di infiniti cerchj delli quali i diametri sono le ordinate della curva genitrice. Onde dividendo l'asse in minime parti, li cerchj corrispondenti rappresenteranno tutta la superficie del solido. Ora sia AT*tu* (*fig.*34.) uno delli detti cerchj descritto dalla rivoluzione dell'ordinata AT che incontra l'asse AP in A. Sia O l'occhio, P il punto nel quale TP, tangente della curva genitrice taglia l'asse. Si conduca PO, la quale prolungata, se è necessario, incontri il piano del cerchio T*tu*, in Q. Di più condotte le rette QT, Q*t*, tangenti del cerchio in T, *t*, l'arco T*t* sarà visibile, l'altra parte rimanendo nascosta.

La dimostrazione è manifesta: poichè li piani POQT, POQ*t* sono piani tangenti del circolo e della curva genitrice in T, *t*, e conseguentemente ancora delle minime parti della superficie. Basterà osservare brevemente diversi casi secondo la posizione del punto O. Se O cadesse in P, tutto il circolo, T*tu* sarebbe visibile. Se si supponesse l'occhio caminare verso *o*, in linea retta, l'arco

T*ut*

Tut diventerebbe visibile, e rimarebbe *Tt* nascosto. Sia l'occhio in ω, talmente che sia ωP parallela a qualche diametro del cerchio *Ttu*, sarà *Tt* un semicerchio, e supponendo ωP infinita, tutti li archi *Tt* saranno semicircoli, e la projezione della figura sarà simile ed uguale alla figura genitrice. Si potrebbe ancora supporre che il punto Q non cadesse fuori del cerchio *Ttu*; onde la determinazione delli punti T, *t* sarebbe impossibile.

Cor. Se il solido fosse un cono, supposto l'occhio in P, o anche in qualunque lato del cono prolungato, sarebbe visibile tutta la superficie del cono. Onde in questo caso l'anamorfosi potrebbe vedersi in tutta la superficie del cono. Ma se il solido fosse un cilindro, è chiaro che l'arco *Tt* compreso tra le due tangenti sarebbe sempre minore d'un semicerchio, e che l'occhio collocato in un lato qualunque prolungato del cilindro non potrebbe vedere l'anamorfosi.



NUM. V.

NUM. V.

Dell'ombra delle figure date.

BEnchè io abbia già ſpiegato e dimoſtrato la pratica delle ombre nelli ultimi eſempj della perſpettiva, nulladimeno la materia eſſendo capace di ſublimi conſiderazioni matematiche, ho creduto doverne trattare un poco più diffuſamente in queſto luogo.

PROBL. I.

Eſſendo dato il centro colla diſtanza del quadro. Data di più la linea evaneſcente d'un piano colla projezione d'un punto luminoſo e della ſua poſizione ſu queſto piano, ritrovare la projezione dell'ombra d'un punto, del quale ſono date la projezione e la poſizione ſull'iſteſſo piano, e trovare il punto evaneſcente del raggio di luce.

Sia, ET (*fig.*35.) la linea evaneſcente data, *s* la projezione del punto luminoſo, R la projezione della ſua poſizione; A la projezione del punto originale del quale ſi cerca l'ombra; B la projezione della ſua poſizione, e P ſia il punto evaneſcente delle linee perpendicolari al piano dato, il quale punto ſi ritrova (*per il problema* 14.). Si conduca RB che tagli la linea evaneſcente in V e ſia condotta VP: Di poi conducendo SA, che tagli RV in C e PV in D ſarà C l'om-

l'ombra cercata, e D il punto evanescente del raggio di luce.

DIM.

Li punti originali di R, B, A, s sono in un piano perpendicolare al piano dell'ombra; onde l'ombra sarà nel punto C, che è l'intersezione del raggio SA, col piano RB. Di più V è il punto evanescente di RB.Perciò PV è la linea evanescente di RSAB,e conseguentemente D è il punto evanescente di SA.

*Cor.*1. Se il punto originale di luce sia dietro allo Spettatore, talmente che non possa essere rappresentato sul quadro, la sua projezione può dirsi imaginaria, essendo come l'ombra dell'occhio dello spettatore sul quadro. Onde deve concepirsi trasferita nella parte del piano opposta al punto originale; cioè se (*num.*2.) B fosse tra P e A,nel caso presente S deve essere tra P e R. Overo se il punto luminoso fosse il Sole, ed anche un'altra luce qualunque, purchè supposta ad una distanza infinita, coinciderebbero li punti R, V siccome ancora li punti D, S come si vede rappresentato *num.*3. ove il Sole è supposto nel quadro, e *num.*4 ove si suppone dietro allo spettatore. Onde la sua projezione imaginaria è in S.

*Cor.*2. Essendo data una figura qualunque si possono avere li punti evanescenti di tutte le linee della medesima (*probl.*2.). Onde avendo la posizione d'un punto qualunque della figura sopra il

piano

piano dell'ombra, e ritrovando (*probl.*13.) la posizione di altri punti della medesima figura, si potrà con questa proposizione determinare le loro ombre.

*Cor.*3. Con questa medesima proposizione si può trasportare l'ombra d'un piano all'altro. Imperocchè essendo data la posizione d'un raggio di luce rispettivamente a un piano del quale è data la linea evanescente, sarà ancora data la posizione del raggio rispettivamente ad un'altro piano del quale la linea evanescente è data. Di più essendo data la projezione d'una linea e della sua posizione sopra uno delli piani, si troverà la projezione della posizione di questa linea sopra l'altro piano (*probl.*17.). Onde si avrà l'ombra cercata.

*Cor.*4. Questo problema colli suoi corollari basta per definire l'ombra di qualunque figura sopra qualunque piano. Col medesimo metodo si potrebbero determinare le ombre prodotte da diversi punti luminosi, o diretti, o riflessi, la qual cosa sarebbe utilissima nella pittura, e massimamente se si osservasse la diminuzione delli colori, e delle ombre secondo la maggiore distanza dalli punti luminosi, e la riflessione della luce. Ma sarebbe impossibile il determinare queste cose con un'esatta teorìa. Si potrebbe vedere a questo proposito un saggio e come un principio di sperimenti fatti dal Sig. Maraldi, e descritti nelle memorie dell'academia nell'anno 1722.

Scol. Con quest'istesso metodo si potrebbero ritrovare diversi punti ombrosi d'una curva qua-

lunque

lunque data,e per *approssimazione* l'ombra di tutta la curva, e la sua projezione in un piano dato; Ma li geometri sapranno determinare esattamente la curva prodotta dall'ombra d'una curva qualunque data sopra un piano dato: E' evidente che le curve formate dall'ombra d'una curva sono le curve medesime, che nascono dalla sezione d'un cono del quale il polo è il punto luminoso, e la base è la curva dàta. Onde trovando col calcolo la sezione del cono dato, e del piano di projezione, si avrà la curva cercata, come sarà chiaro dalli problemi seguenti.

PROBL. II.

Dato il cono luminoso FPG, il di cui polo sia P, e data l'altezza d'un oggetto PD in un piano dato di posizione HTA ritrovare la curva ombrosa nell'istesso piano.

E' evidente dallo Scolio precedente, che la curva cercata è l'intersezione della superficie data col piano HTA (*fig.36.*). Ora essendo RT l'asse conjugato della sezione, si conduca cn parallela ad RT, e cu parallela ad FG. Si faccia $Pd = b$ il seno dell'angolo ACP $= b$, il coseno $= c$, il seno dell'angolo CPH, ovvero CPA $= p$, il coseno $= d$. Essendo CHF uguale alla somma, e PAC uguale alla differenza degli angoli HCP, CFH, sarà $bd + cp$ uguale al seno dell'angolo CHF, e $bd - cp$ uguale al seno dell'angolo PAC (*per gli elementi di trigonometria*) supposto il

raggio

raggio $= 1$. Di più il seno dell'angolo PCA è al raggio come Pd è a PC, onde sarà PC $= \frac{b}{b}$.

Inoltre $bd + cp : p = \frac{b}{b} :$ HC $= \frac{bp}{b \times \overline{bd + cp}}$, e $bd - cp : p = \frac{b}{b} :$ AC $= \frac{bp}{b \times \overline{bd - cp}}$, e conseguentemente essendo $p^2 = 1 - d^2$, e $b^2 + c^2 = 1$. sarà AH $= \frac{2bdp}{\overline{bb + cc} \times \overline{dd - cc}}$. Di più $d : p =$ PC $\left(\frac{b}{b}\right) : \frac{pb}{db} = rc$. Finalmente (per la natura della curva) HC$\times$AC $\left(\frac{p^2 b^2}{b^2 \times \overline{d^2 - c^2}}\right) : cn^2 \left(\frac{p^2 b^2}{d^2 b^2}\right) =$ AH^2 $\left(\frac{4b^2 p^2 d^2}{\overline{d^2 - c^2}^2}\right) : \frac{4b^2 p^2}{d^2 - c^2} =$ RT^2. Onde apparisce, che d essendo maggiore di c, la curva descritta è un' ellisse, della quale l' asse traverso $= \frac{2pdb}{d^2 - c^2}$, il conjugato $= \frac{2pb}{\overline{d^2 - c^2}^{\frac{1}{2}}}$, ed il parametro $= \frac{2pb}{d}$. Se $d = c$, allora la quantità $\frac{2bpd}{d^2 - c^2}$ diventa infinita, e l'ellisse si muta in una parabola, della quale il para-

parametro $= \frac{2bb}{c}$; ma ſe d è minore di c, allora $\frac{2bdp}{d^2 - c^2}$ diventa negativa, e la curva ſi muta in iperbola, della quale l'aſſe traſverſo $= \frac{2bpd}{c^2 - d^2}$; il conjugato $= \frac{2pb}{\sqrt{c^2 - d^2}}$, ed il parametro $= \frac{2pb}{d}$. Finalmente ſe $d = o$, il parametro $\frac{2pb}{d}$ è infinito, e l'iperbola degenera in linea retta.

Queſto problema ſarebbe un problema di Gnomonica, ſe Pd eſſendo l'altezza d'uno ſtile, il piano di ſezione foſſe l'orizonte, e ſe l'aſſe PCB eſſendo parallelo all'aſſe della terra, l'angolo BPF, o BPG foſſe uguale al complemento della declinazione del Sole ſuppoſta invariabile, e ACP uguale all'altezza del polo. Il problema eſſendo eſpreſſo in queſt'altra maniera, la declinazione eſſendo maggiore del complemento della latitudine, la curva ombroſa ſarebbe un'ellisse, esſendo minore, un'iperbola, nel caſo d'uguaglianza, una parabola; la declinazione esſendo nulla, l'iperbola ſi muterebbe in retta, che è il caſo dell'Equinozio.

Cor. Da queſto problema ſi fa evidente quel che asſeriſce Nevvtono nell'Enumerazione delle linee

linee del terzo ordine: *Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciuntur, umbræ sectionum conicarum semper erunt sectiones conicæ*. Soggiunge l'autore: *Quemadmodum circulus umbram projiciendo generat omnes sectiones conicas, sic parabolæ quinque divergentes umbris suis generant & exhibent alias omnes secundi generis curvas*. Per dimostrare quest' altra parte, premetterò il lemma seguente.

Lemma. Sia in un piano BDG (*fig*.37.) la curva BD, l'asse della quale sia BG, e sia fuori di questo piano un punto dato A, dal quale partano infinite rette terminate al perimetro della curva data, si troverà l'equazione di questa superficie conica. Sia AB $= b$, AP $= x$. Si conduca MP perpendicolare ad AB $= y$. Da un punto qualunque N della superficie conica si abbassi NM $= z$ perpendicolare al piano delle linee AB, BG. Siano BG le coordinate della curva BD, u, s. Poichè è data la posizione del punto A, sarà dato l'angolo GBA; cioè la ragione di BO ad OG sarà data conducendo GO perpendicolare ad AB, sia questa ragione $= \frac{m}{n}$. Onde si avrà

$$BG : BO = \overline{\sqrt{nn + mm} : m}, \text{e } BO = \frac{mu}{\sqrt{nn + mm}};$$

Di più BG : OG $= \overline{\sqrt{nn + mm}} : m$; onde

OG $=$

$OG = \frac{nn}{\sqrt{nn+mm}}$. In oltre per la similitudine delli triangoli OG : BO = PM (y) : PK = $\frac{my}{n}$, e AK : MK = AB : BG. Onde essendo MK

$$= \sqrt{PM^2 + PK^2} = \sqrt{\frac{mm}{nn}y^2 + y^2}\text{, e AK}$$

$$= AP + PK = x + \frac{my}{n} \text{ si avrà } x + \frac{my}{n} :$$

$$\sqrt{\frac{mm}{nn}yy + yy} \left(y\sqrt{\frac{mm+nn}{nn}}\right) = b : by$$

$$\frac{\sqrt{\frac{mm+nn}{nn}}}{x + \frac{my}{n}} = u\text{. Finalmente per la similitudine}$$

delli triangoli, $KM\left(y\sqrt{\frac{nn+mm}{nn}}\right) : MN\ (z)$

$$= BG\left(\frac{by\sqrt{\frac{nn+mm}{nn}}}{x+\frac{m}{n}y}\right) : DG\left(\frac{bz}{x+\frac{m}{n}y}\right)$$

$= s$.

In questa soluzione si suppone l'angolo GBO acuto, poichè si è presa AK $= x + \frac{m}{n} y =$ AP $+$ PK. Ma se l'angolo GBO fosse ottuso, è evidente che AK sarebbe $= x - \frac{m}{n} y$. Onde si avrebbbe in questo caso $s = \frac{bz}{x - \frac{m}{n} y}$, e $u = \frac{by \sqrt{\frac{mm + nn}{nn}}}{x - \frac{m}{n} y}$. Se l'angolo fosse retto, sarebbe $m = o$, onde verrebbero le equazioni semplicissime, $s = \frac{bz}{x}$, $u = \frac{by}{x}$.

E' evidente, che essendo data l'equazione della base BD espressa per u, s, e sostituendo i loro valori $\frac{by \sqrt{mm + nn}}{nx \mp my}$, e $\frac{bz}{x \mp \frac{m}{n} y}$ dati per l'equazione della curva, si avrà l'equazione alla superficie conica. Per esempio, il cono essendo retto, e conseguentemente $m = o$, l'equazione precedente diventa $s = \frac{bz}{x}$, e $u = \frac{by}{x}$. Onde se la base fosse un cerchio, cioè $ss + uu = aa$, l'equa-

l'equazione del cono retto diventa $\frac{aa}{bb}xx = yy + zz$; e ſupponendo coſtante una delle variabili x, y, z è chiaro, che ſi ritornerebbe alla curva, che è la baſe del cono; così facendo $z = b$, ſi avrà $yy + xx = aa$, equazione al cerchio. Sia la curva della baſe $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$, l'equazione del cono ſarà $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$, nella quale ſupponendo di nuovo z coſtante, ſi ritrova la curva come prima. Ma ſe in vece di z ſi faceſse x coſtante, verrebbe l'equazione $yy = a + bz + azz + ez^3$, che è l'equazione delle parabole divergenti.

Cor. Poichè le variabili u, s ſono eſpreſse per una funzione di dimenſione, nulla delle coordinate della ſuperficie conica, qualunque funzione delle medeſime variabili ſarà parimente una funzione di dimenſione nulla delle medeſime coordinate. Perciò qualunque ſia l'equazione della baſe, tutti i termini eſsendo del medeſimo grado dopo avere fatta la ſoſtituzione, l'equazione alla ſuperficie conica ſarà ſempre omogenea. Queſta è una proprietà commune a tutte le ſuperficie coniche, nelle quali le coordinate partono dal polo, che in tutti i termini della loro equazione le variabili preſe inſieme ſono del medeſimo grado. Onde ſi ricava, come nel lemma, che eſsendo la curva della baſe $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$, l'equa-

l'equazione del cono sarà $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$.

PROBL.

Data una superficie conica, ritrovare la curva che forma la sezione della superficie con un piano qualunque dato di posizione,

Sia una superficie qualunque espressa colle tre coordinate AP, x, PM, y, MN, z (*fig.* 38.). Se un piano dato di posizione incontra li tre assi AQ, AR, AP della superficie data ne' punti B, R, Q dati, saranno date le linee AR, AQ, AB, le quali essendo chiamate a, b, c, sarà l'equazione generale del piano secante $\frac{ax}{c} + \frac{ay}{b} + z = a$.

Ora per mezzo di questa equazione facendo svanire una delle variabili, e sostituendo il suo valore nell'equazione alla superficie, si avrà un'equazione composta di due variabili, la quale esprimerà la curva di projezione sopra uno de' piani, relativamente alla variabile scacciata dall'equazione. E' evidente, che la curva di projezione così trovata è dell'istessa spezie colla curva di sezione. Imperocchè l'ascissa RE della curva di sezione è all'ascissa AP della curva di projezione sul piano QAB, come RB è a AB. Nella medesima maniera EN è a PM, come RQ è a AQ. Onde essendo data l'equazione alla curva di projezione

zione ſul piano QAB, ſi avranno le coordinate RE, QN della curva di ſezione. Per eſempio, eſsendo RB $= m$, ſarà RE, $u = \frac{mx}{c}$, e $x = \frac{cu}{m}$.

Di più ſuppoſto RQ $= n$, ſi avrà EN, $s = \frac{ny}{b}$, e $y = \frac{bs}{n}$. Dunque nell'equazione alla curva di projezione ſul piano QAB, ſi ſoſtituiſca in vece di x e y il loro valore $\frac{cu}{m}$, $\frac{bs}{n}$, ſi avrà l'equazione della curva di ſezione, la quale, come è evidente, ſarà dell'iſteſsa ſpezie che la curva di projezione.

Cor. Sia l'equazione alle parabole divergenti $xy^2 = ax^3 + bxx + ex + d$; ſarà, per il lemma precedente, $xy^2 = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$, l'equazione alle ſuperficie coniche che hanno queſte curve per baſi. Ora in queſta equazione, per mezzo dell'equazione generale al piano, ſi faccia ſvanire la variabile z, la quale è compoſta delle variabili x, y nel primo grado, e di coſtanti. Onde avendo nell'equazione della ſuperficie la variabile z al primo, ſecondo, e terzo grado, è evidente, che l'equazione alla curva, fatta la ſoſtituzione, conterrà le variabili x, y combinate inſieme, e con quantità coſtanti, di tutte le maniere poſſibili in una equazione del terzo grado. Perciò la detta equazione ſi potrà ridurre all'equazione generale del terzo ordine $a + by + cx$

$cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + mxxy + nx^3 = o$. Onde l'ombra delle parabole divergenti potrà produrre tutte le curve del terzo ordine. L'equazione precedente si trasformerà nelle quattro equazioni generali del Nevvton colli metodi cogniti dagli algebristi. Si può consultare in questa materia l'eccellente opera del Sig. Cramer intitolata: *Analisi delle curve*.

In un' altra maniera.

Sia una superficie qualunque espressa colle tre coordinate AP, x, PQ, y, QM, z (*fig.*39.). Siano AP, PQ in un piano al quale s'intenda QM perpendicolare. Sia tagliata questa superficie da un piano qualunque, del quale la commune intersezione col piano di APQ sia DT. Dal punto A abbassando in DT, prolungata, la perpendicolare AE, sarà AE il seno, e DE il coseno dell'angolo d'inclinazione ADE. Sia M un punto della sezione cercata, dal quale si abbassi MT perpendicolare a DT, l'angolo MTQ sarà uguale all'inclinazione data. Siano DT, TM le coordinate della sezione. Dal punto T sull'asse AD si abbassi la perpendicolare DTV. Di più condotta la perpendicolare TN, essendo l'angolo TQP = TDV = ADE, si avranno, per la similitudine delli triangoli, li valori x, y, z. Sia AD $= f$, AE $= a$, DE $= b$, DT $= t$, TM $= u$, sarà AD (f): AE (a) = DT (t): TV $= \frac{at}{f}$. Di più AE (a):

DE

DE $(b) = TV\left(\frac{at}{f}\right) : DV = \frac{bt}{f}$. In oltre DT $(t) : MT\ (u) = DV\left(\frac{bt}{f}\right) : QT = \frac{bm}{g}$. Finalmente AD $(f) : AE\ (a) = QT\left(\frac{bu}{f}\right) : NT(PV) = \frac{abu}{ff}$. Onde AP $(x) = AV - PV = AD + DV - NT = f + \frac{bt}{f} - \frac{abu}{ff}$. Nell' istessa maniera AD $(f) : DE\ (b) = QT\left(\frac{bu}{f}\right) : QN = \frac{bbu}{ff}$. Onde PQ $(y) = TV + NQ = \frac{at}{f} + \frac{bbu}{ff}$. E' evidente di più, che QM $(z) = \frac{bu}{f}$. Se nell'equazione della superficie in vece di x, y, z si sostituiscano i loro valori espressi per t, u, si avrà un'equazione composta delle sole variabili t, u, e di costanti, che sarà per conseguenza l'equazione della sezione cercata.

Cor. 1. Poichè nelli valori di z, y, x le variabili u, t sono del primo grado, è evidente, che sostituendo questi valori nell' equazione della superficie conica, l'equazione alla curva non può arrivare a un grado più alto dell'equazione medesima alla superficie. Nulladimeno può accadere, che

che l'equazione alla fezione fia d'un grado inferiore, distrugendosi li termini più alti con fegni contrarii.

*Cor.*2. Sia l'equazione del cono retto, come nel lemma precedente, $\frac{aa}{bb}xx = yy + zz$. Sostituendo in luogo di x, y, z i loro valori già trovati, dalla sola osservazione delli medesimi valori si vede, che si avrà un'equazione composta delle variabili u, t in tutte le maniere possibili in un'equazione del secondo grado; onde si avrà la formola generale delle curve del secondo ordine, ovvero delle fezioni coniche; e si avranno secondo li diversi casi le equazioni a una delle fezioni coniche, variando la posizione del piano secante colla determinazione delle costanti. Similmente si avrà l'equazione la più composta del terzo grado, se nell'equazione al cono, che ha per base le parabole divergenti $xy^2 = ax^3 + bxxz + cxzz + dz^3$, si sostituiscano li valori delle medesime x, y, z. Onde si vede ancora in quest'altra maniera quel che è già stato dimostrato nelli due problemi precedenti.



NUM.

NUM. VI.

Della projezione delle curve.

LA projezione delle curve è una delle materie più importanti, e più utili della geometria. Il Nevvton nel lemma 21. delli principii ha accennato la dottrina delle projezioni, ovvero delle trasmutazioni colla sua solita brevità, ed eleganza. Ma essendo già stato illustrato diffusamente il detto lemma nelli nostri commenti a quella eccellente opera, mi contenterò ora di fare vedere come dalli principii di perspettiva si ricava la trasformazione delle curve.

PROBL. I.

Trasformare una curva qualunque data in un'altra dell'istesso genere.

Sia una curva qualunque HGI (*fig.*40.). Si conducano ad arbitrio le due parallele AO, BL, le quali tagliano la retta AB, data di posizione in A, B. Da un punto qualunque G della curva si conduca GD parallela ad AO. Di poi da qualche punto O dato nella linea OA, al punto D si conduca la retta OD. che incontrerà BL in *d*. Finalmente dal punto *d* si conduca *dg*, la quale faccia colla retta BL un angolo qualunque dato, talmente che *dg* sia ad O*d*, come DG ad OD, sarà *g* la projezione del punto G. Nell'istessa maniera

niera si troveranno gli altri punti della curva. E' evidente, che questa costruzione si riduce al primo problema della Perspettiva, essendo O il punto di veduta, o polo, e a il centro del quadro. Si troverà facilmente l'equazione della nuova curva; imperocchè per la similitudine delli triangoli aDO, AOD, sarà $ad : OA = Od : OD$, e per costruzione $od : OD = dg : DG$. Di più essendo parallele le rette AO, Bd, sarà $Od : OD = AB : AD$. Onde $ad : OA = dg : DG = AB : AD$, e perciò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, e $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sia DG la prima ordinata $= y$, dg la seconda ordinata $= u$, la prima ascissa $AD = x$, la nova ascissa $ad = z$. Si faccia $OA = a$, $AB = b$, sarà $x = \frac{ab}{z}$, e $y = \frac{au}{z}$, dalli quali valori si potrà ricavare l'equazione della nova curva, sostituendo in vece di x, y i loro valori per z, u.

Sia per esempio l'equazione alle sezioni coniche $y^2 = px^2 + qx + s$, si avrà $u^2 = \frac{s}{a^2} \times z^2 + \frac{qb}{a} \times z + pb^2$. Sia $y^2 = px^3 + qx^2 + sx + t$, l'equazione alle cinque parabole divergenti,

genti, farà $u^2 z = \frac{t}{a^2} \times z^3 + \frac{sb}{a} \times z^2 + qb^2 \times z + pb^3 a$. Generalmente l'equazione $y^m = px^n + qx^{n-1} + sx^{n-2} + tx^{n-3} + \&c. + w$, darà l'equazione alla nova curva $u^m z^{n-m} = p \times b^n a^{n-m} + q \times b^{n-1} a^{n-m+1} \times z + s \times b^{n-2} a^{n-m+2} \times z^2 + t \times b^{n-3} a^{n-m+3} \times z^3 + \&c. + w \times a^{-m} \times z^n$. Si procederebbe nell'isteffo mòdo, fe l'equazione propofta conteneffe qualunque funzioni delle variabili x, y. Se l'equazione ritrovata fi doveffe ridurre ad una forma più femplice, fi adopererebbe ancora l'artifizio delle trasformazioni; per efempio, fe fecondo il metodo del Nevvton fi doveffe abbaffare l'equazione, fi troverebbe un'altra equazione della medefima curva, fupponendo le ordinate parallele a qualche afintoto. Il calcolo è più lungo che difficile, e fi può leggere in quefta materia il libro già lodato del Sig. Cramer.

Cor. 1. Dalli valori ritrovati delle variabili x, y è manifefto, che l'equazione della curva trasformata è dell'ifteffo ordine colla nova curva. Onde ancora fe l'equazione della prima curva foffe differenziale, farebbe differenziale l'equazione della curva nova,

Cor.

Cor. 2. Col metodo delle projezioni si potranno determinare le proprietà delle curve. Se in un piano originale vi sia una retta qualunque, la quale prolungata, se sia necessario, incontri la commune intersezione del piano originale, e del piano di projezione, la projezione d'un punto qualunque dato in questa linea, tanto più, o meno sarà distante dalla linea evanescente, quanto sarà minore, o maggiore la distanza del punto dalla linea dirigente. Onde si ricava facilmente, che li rami infiniti d'una curva qualunque si buttano nella linea evanescente (sarà a proposito di rivedere in questo luogo le definizioni date nel principio della Perspettiva). Si potrà conoscere dalla projezione della tangente ad una distanza infinita, se la linea evanescente diventi asintoto della curva, se ne sia secante, o tangente, e in quali punti. Mutata l'inclinazione delli piani, o la posizione della figura data, talmente che la curva sia secata dalla linea dirigente, da ogni intersezione nasceranno nella curva di projezione due rami iperbolici. Se la linea dirigente secasse la curva in due punti, condotte a questi due punti due tangenti, che concorrano in un punto, si avranno per ogni punto di contatto due rami iperbolici alle asintoti formate dalle tangenti. Se la linea dirigente è concepita moversi d'un moto parallelo, finchè sia tangente della curva, quanto più si accosterà la mutua intersezione delle tangenti alla sommità della curva, tanto più sarà lontana la sua projezione. Ma se l'intersezione cade nella

sommi-

ſommità medeſima, cioè nella linea dirigente, non vi ſaranno aſintoti, e li rami d'iperbolici diventeranno parabolici. Nell'iſteſſa maniera, ſe la linea dirigente ſia ſecante della curva in un punto, e tangente in un altro, vi ſaranno due rami iperbolici, e due parabolici; allora la curva ſarà di quel genere di curve, che ſi chiamano *Iperbolo parabole*. Li rami infiniti d'una curva ſono ſempre in numero paro. Onde in alcuni caſi può accadere che li rami ſiano poſti dalla medeſima parte. Per eſempio, la curva eſpreſſa per l'equazione $y = \frac{x^2}{a} + \sqrt{ax}$ ha due rami parabolici. Ma ſupponendo l'aſciſſa x negativa, l'ordinata y ſarà imaginaria, e per conſeguenza un ramo non andando dalla parte delle ordinate imaginarie, è neceſſario, che li due rami vadano dall'iſteſſa parte.

Cor.3. Il piano originale, ed il piano di projezione ſono reciprochi tra di loro, e per conſeguenza ancora ſono reciproche la linea dirigente, e la linea evaneſcente. Onde è evidente, che una curva qualunque può conſiderarſi come prodotta dalla projezione d'un'altra, cioè un punto qualunque della curva di projezione diventerà il punto originale medeſimo, ſe ſi concepiſca la curva di projezione come curva originale; e poichè la tangente della curva nell'interſezione colla linea dirigente diventa aſintoto, vicendevolmente gli eſtre-

estremi dell'asintoto ritorneranno al contatto nella linea evanescente. Onde si ricava, che un asintoto retta incontra la curva in tanti punti, quante sono le dimenzioni della curva meno due; imperocchè le due intersezioni dalle quali è formato il contatto svaniscono nella projezione. Onde l'asintoto d'una linea del terzo ordine seca la curva in un solo punto, e l'asintoto dell'iperbola conica in nessuno. Due rami parabolici trovandosi in qualche curva tolgono due delle asintoti rette, che poteva avere la curva; così nelle linee del terzo ordine, le quali ammettono tre asintoti per il numero delli punti nelli quali possono essere secate dalla linea dirigente, se vi saranno due rami parabolici, non vi resterà che un asintoto per i due rami iperbolici. Le intersezioni, e le inflessioni resteranno ancora nella curva di projezione, purchè non siano nella linea dirigente. Rimarranno anche l'intersezione, il contatto, il nodo, il punto di flesso contrario &c. Onde siegue, che la curva di projezione sarà dell'istesso ordine colla curva trasformata; imperocchè il grado della curva è dimostrato dal numero delli punti, nelli quali è tagliata da una retta, e questo numero è l'istesso nella curva di projezione. Si deve eccettuare il caso in cui l'intersezione è nelle linea dirigente, la quale essendo nella projezione mandata all'infinito, saranno le intersezioni della curva di projezione $n-1$, se le intersezioni della curva trasformata siano n. E questa è la ragione per la qua-

quale le ordinate parallele a qualche asintoto nell'equazione d'una curva sono abbassate d'una dimenzione.

PROBL. II.

Enumerare le specie delle curve col metodo delle projezioni.

Siano da enumerarsi le curve prodotte dalla parabola divergente coll'ovale conjugata, la quale curva è espressa coll'equazione $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, nella quale supposta $y = o$, li tre valori dell'ascissa x sono reali e disuguali, si avrà la parabola divergente campaniforme, che è la specie 67. nell'enumerazione fatta dal Nevvton. Si possono considerare diversi casi. Si supponga primieramente la linea dirigente perpendicolare all'asse della figura, o parallela alle ordinate. Se la linea dirigente (*fig.* 41.) seca l'asse in A fuori della curva, la parabola anderà in iperbola conchoidale, l'asintoto sarà la linea evanescente, nella quale ancora si butta l'ordinata infinitamente distante. L'ovale anderà in un altra ovale posta nel vertice della conchoidale. Sarà la specie 39. dell'enumerazione citata. Se la linea dirigente sia tangente dell'ovale in B, si muta l'ovale in parabola, e sarà la specie 55. Se la linea dirigente seca l'asse in O, e l'ovale nelli punti T, T, condotte alli medesimi punti T, T, le tangenti che concorrano verso A, le loro projezioni saranno due asintoti alle iperbole formate dall'ova-

ovale. Il concorso delle asintoti caderà sopra la linea evanescente, che sarà la terza asintoto. Specie 21. Se la linea dirigente seca l'asse in D, talmente che le tangenti in T, T diventino parallele, queste tangenti si butteranno in due asintoti che concorreranno nella terza asintoto. Specie 31. Sia l'interfezione nel punto E, talmente che le tangenti concorrano dall'altra parte, il triangolo formato dalle asintoti nella projezione caderà al di sotto dell'asintoto della conchoidale. Specie 20. Se la linea dirigente sia tangente dell'ovale in F, sarà mutata l'ovale in parabola, il vertice della quale sarà sopra l'asintoto della conchoidale. Specie 56. Se la linea dirigente taglia l'asse in G tra la parabola e l'ovale, la projezione sarà la specie 40. Se la linea dirigente sia tangente della parabola in H, si avrà la curva iperbolo parabolica con un ovale posta sull'asintoto. Questa specie non si trova nell'enumerazione fatta dal Nevvton; la sua equazione è $xy^2 = bx^2 + cx + d$, che è la medesima colla specie 55., purchè le radici dell'equazione $bx^2 + cx + d = o$, si pongano negative, o che il coefficiente c sia affirmativo. Se la linea dirigente taglia la parabola nelli punti S, S, ove è concava verso l'asse, condotte le tangenti SO, SO, concorreranno tra le parabole e l'ovale, per esempio in O, e chiuderanno l'ovale nell'angolo che ivi formano; ma prodotte dall'altra parte taglieranno li rami parabolici. Perciò la projezione sarà composta di tre iperbole con un ovale compresa

presa nel triangolo delle asintoti. L'iperbola nella quale si butta l'arco compreso tra la linea dirigente e il vertice si chiama *inscritta*; le due altre prodotte da rami infiniti si dicono *ambigene*. Questa specie è stata omessa dal Nevvton.

Ho considerato il caso, in cui la linea dirigente è parallela alle ordinate, ora si supponga che non vi sia questo parallelismo. Se la linea dirigente seca la parabola in un punto qualunque T dall'una o dall'altra parte del flesso contrario (*fig.*42.) e non arrivi all'ovale, la tangente TQ in questo punto sarà asintoto della curva di projezione. Le estremità delli rami nella projezione si uniranno con un flesso contrario nella linea evanescente; dall'ovale nascerà un ovale, e la curva diventerà un' *Iperbola anguinea* coll'ovale. Specie 33. Rimanendo il punto T colla tangente TQ, si concepisca intorno a esso punto rivolgersi la linea dirigente, finchè sia tangente dell'ovale in N, o, K, resterà l'iperbola anguinea, e l'ovale sarà trasformata in parabola. Specie 52. Si rivolga la linea dirigente, talmente che tagli l'ovale nelli punti R, R, ove le tangenti dell'ovale formano colla tangente TQ il triangolo SQM, overo queste tangenti siano parallele, nell'uno e nell'altro caso la projezione sarà composta di due iperbole inscritte alle asintoti formate dalle tangenti dell'ovale, e di una terza iperbola anguinea. Specie 9. Se la posizione della linea dirigente sia tale, che le tangenti in R, R concorrano colla terza TQ, le asintoti passeranno per l'istesso punto

nella curva di projezione. Specie 26. Se la linea dirigente sia secante della parabola in T, e tangente in X, o, X2, la projezione sarà composta di due iperbole parabole, una delle quali è secata dall'asintoto con un ovale conjugata. Specie 46. Se la linea dirigente seca la parabola nelli punti T, B, C, le tangenti in questi punti TQ, FG, HI che non possono ne convergere nell'istesso punto, ne essere tutte parallele, produranno altrettante asintoti che formano il triangolo nel quale è compresa l'ovale; ma la parabola darà tre iperbole, delle quali quella che nasce dalli rami infiniti sarà circonscritta: imperocchè le tangenti nelli punti estremi T, C incontrano tutte due li rami, almeno nella projezione; ma la tangente in B incontra l'una delle parti intermedie TB, o BC, purchè il punto B non sia un flesso contrario; onde quella parte produrrà un iperbola ambigena; la terza darà l'iperbola inscritta. Specie 1. Se la linea dirigente coincida coll'asse, le tre tangenti parallele nella projezione passeranno per quell'istesso punto della linea evanescente nel quale concorrono le estremità delli rami. Specie 27.

Nella medesima maniera che la prima parabola divergente è stata ridotta in diverse specie, potrebbero ridursi ancora le quattr' altre parabole considerate dal Nevvton, o anche qualunque altre curve di qualunque genere. Onde si dimostrerebbe anche in questo modo quel che ha asserito Nevvtono dell'ombra delle parabole divergenti. *Cor. Probl. 2. num. v.*

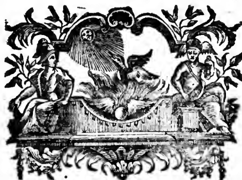
Schol.

Scol. 1. Sarà facile il ridurre le curve di projezione alle equazioni Nevvtoniane. Imperocchè le tre ſommità della figura trasformata B, F, H (*fig.* 41.) ſupponendo l'ordinata $= o$, daranno le ſommità della curva di projezione. Preſa per prima ordinata la linea evaneſcente, la poſizione della linea dirigente farà conoſcere la poſizione di queſte ſommità, cioè, ſi avranno li ſegni delli valori dell'aſciſſa, eſſendo l'ordinata $= o$. In queſta maniera ſi vede, che nella ſpecie 40. le projezioni delli punti B, F cadono al di ſopra della linea evaneſcente, la projezione del punto H cade al di ſotto della medeſima. Nell'equazione della curva $xy^2 = -ax^3 + ax^2 + cx + d$, eſſendo l'ordinata $= o$, vi ſaranno due valori dell'aſciſſa x col medeſimo ſegno, e il terzo col ſegno contrario. E' evidente che la curva di projezione è eſpreſſa con queſta equazione; imperocchè queſta curva avendo un diametro, manca il termine ey; e poichè oltre le ſommità nelle quali ſi buttano li punti F, H nella projezione, l'ordinata diventa imaginaria, il termine il più alto ax^3 deve avere il ſegno $-$. Se la linea dirigente paſſando per qualche ſommità, l'iſteſſa ſommità ſi butti all'infinito, l'equazione Nevvtoniana ſi abbaſſa d'un grado, e in vece di $xy^2 = ax^3$ &c., ſi fa $xy^2 \doteq bx^2 + cx + d$. Si deve finalmente oſſervare che li punti di fleſſo contrario reſtano nella figura trasformata, e nella figura di projezione, purchè la linea dirigente non paſſi per eſſi punti. Dalla projezione ſi conoſcerà verſo

quale parte della projezione cadano li detti punti. Per determinare a quale equazione appartenga qualche projezione, per esempio, la specie 9.; dal punto T (*fig.*42.) ove la dirigente seca la curva, condotte tutte le tangenti possibili TX, TX^2, TK, TN, le loro projezioni parallele tra di loro, e all'asintoto prodotta dalla TQ, saranno tangenti della curva di projezione; il numero delle tangenti, e la loro posizione rispettivamente a TQ mostreranno le dimenzioni dell'equazione, e li segni delle radici. Sia l'equazione $x^4 + bx^3 +$ &c. $= o$, la quale esprima le ascisse comprese tra qualche asintoto considerata come prima ordinata, e tra le rette parallele all'asintoto tangente della curva, o che passano per un punto doppio. In questa equazione descritta dal Nevvton nell'enumerazione delle linee del terzo ordine, le radici sono reali e disuguali. Ma le tangenti TK, TX nella projezione buttandosi al di sotto di TQ, e TX^2, TN al di sopra, si vede che due radici hanno delli segni contrarii alle due altre. Presa per prima ordinata l'asintoto prodotta dalla tangente dell'ovale SM; poichè dal punto del contatto R una sola retta SM può essere tangente della curva, le radici dell'equazione ax^4 &c. saranno tutte imaginarie.

*Scol.*2. E' evidente che si potranno trattare nell'istessa maniera le curve di ordini superiori, avendo prima enumerate le curve *genitrici*, ovvero trasformate. Per esempio nelle curve del quarto ordine si trasformeranno le curve espresse colle

colle equazioni y^2 e $y^4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Nel quinto ordine le curve rappresentate per le equazioni y^2 e $y^4 = ax^5 + bx^4 +$ &c. Nel sesto e settimo ordine, le dimenzioni dell'ordinata siano y^2, y^4, y^6 &c. Queste equazioni trasformate per il metodo delle projezioni oblique, saranno generali nell'ordine della curva genitrice. Ma sarebbe cosa troppo lunga di trattare questa materia più diffusamente.



NUM. VII.

Delle projezioni circolari, e del loro uso nell' astronomia.

LA projezione del cerchio generalmente considerata non solamente contiene tutta la dottrina delle sezioni coniche, ma anche è di grandissimo uso nell'astronomia. Onde aggiungerò in questo luogo alcune proposizioni appartenenti a questa materia, le quali si possono ricavare facilmente dalli principii precedenti.

PROBL. I.

Ritrovare la projezione d'un cerchio in un piano qualunque dato di posizione.

Sia LS (*fig.*43.) l'interfezione, HN la linea dirigente, CI la linea evanescente, APTB un cerchio per il centro del quale s'intenda condotto un piano verticale che tagli il piano del cerchio nel diametro AB, e si supponga HN fuori del cerchio. Si ritrovi *ab* projezione del diametro AB; di più condotte dal punto H, ove la linea dirigente incontra il piano verticale, le rette HT, HT tangenti del cerchio in T, T, si trovi la projezione *tt* della retta TT, l'ellisse *aptb* descritta con gli assi *ab*, *tt*, sarà la projezione del cerchio dato APTB. Imperocchè le rette AH, TH, TH concorrendo nella linea dirigente, le tangenti dell'

dell'elliffe in t, t faranno parallele all'affe ab, cioè tt farà l'affe conjugato di ab. Per efprimere la curva analiticamente, fia PM ordinata del cerchio $= y$, l'afciffa HM $= x$, il diametro AB $= d$; la diftanza HB del cerchio dalla linea dirigente $= l$, farà $y^2 = -x^2 + \overline{d+2l} \times x - \overline{d+l} \times l$. Si faccia pm ordinata nova $= v$, l'afciffa $Cm = z$, HG $= a$, CG $= r$, fi avrà per l'equazione della projezione $v^2 = -\frac{\overline{d+l}}{r^2} \times l \times z^2 + \frac{\overline{d+2l}}{r} \times a \times z - a^2$, che è l'equazione a un elliffe, la quale farà data di fpecie, purchè fia dato il coefficiente del termine $-z^2$. Imperocchè gli affi ab, tt faranno tra di loro come r a $\sqrt{\overline{d+l} \times l}$. ovvero come CG alla tangente HT. Se foffe $\frac{\overline{d+l}}{r^2} \times l = 1$ la projezione diventerebbe un cerchio.

Ho fuppofto in quefto cafo, che la linea dirigente HN non toccaffe il cerchio ABT, ora fia la linea dirigente tangente in B, effendo $l = 0$ l'equazione della curva di projezione, farà $v^2 = \frac{da}{r} \times z - a^2$, che efprime una parabola, il parametro della quale $= \frac{da}{r}$. Finalmente fe la linea dirigente è fecante del cerchio, per efempio,

in TKT, essendo l negativa, l'equazione della curva di projezione sarà $z^2 = \frac{\overline{a -}}{r^2} \times l + \frac{\overline{d - 2l}}{r} \times a - a^2$. Onde in questo caso si avranno due iperbole opposte, le sommità delle quali sono a, b, le asintoti sono le due tangenti, ed il loro concorso è il centro delle iperbole. Si può leggere una soluzione consimile dell'istesso problema nelli nostri comenti alli principii del Nevvton *Lem.* 22.

Cor. 1. Se il cono BTAZ (*fig.* 44.) descritto sul circolo BTA è secato nel diametro AB da un piano BAZ perpendicolare alla base, si troverà la posizione del piano secante, talmente che la sezione sia data di specie. Considererò il caso dell'ellisse. Prodotto, se è necessario, il diametro AB, si abbassi dal vertice Z la retta ZH, talmente che il rettangolo $AH \times HB$ sia ad HZ^2 in ragione data di F a G, cioè in ragione duplicata dell'asse perpendicolare sul piano verticale all'altro asse; condotta la retta CG parallela ad HZ, la sezione del cono fatta per CG da un piano retto al piano verticale, sarà la sezione cercata. Avendo abbassato la perpendicolare ZI, si conduca la retta ZH per mezzo dell'equazione quadratica $\overline{G - F} \times x^2 + G \times \overline{AB \pm 2BI \times F} \times x = F \times ZB^2$, nella quale equazione, se le radici x, o BH hanno il medesimo segno, li due punti H saranno dalla parte di B. Se siano uguali vi sarà una sola

ZH

ZH determinata dal *maſſimum* della ragione $\frac{F}{G}$.

Se le radici ſono imaginarie o impoſſibili, la ragione richieſta è troppo grande. Si determinerà facilmente queſta maſſima ragione, conducendo nel triangolo ZBA la retta *ps* parallela al diametro AB, e ſecata in *r* dalla retta *tu*, talmente che il triangolo *Ztu* ſia iſoſcele. Di più ſi faccia il rettangolo $ur \times rt$ a rs^2, come tu^2 (G) a F, ſarà la ragione $\frac{F}{G}$ la maſſima. Ovvero ancora condotta *Zb* parallela a *tu*, ſarà la maſſima $\frac{F}{G} = \frac{Ab \times bB}{Zb^2}$. Nel cono retto la ragione maſſima è d'ugualianza, cioè il piano ſecante è parallelo alla baſe.

Cor. 2. Se la curva originale foſſe una ſezione conica qualunque, la projezione della quale doveſſe eſſere una ſezione conica data di ſpecie, ſi procederebbe coll'iſteſſo metodo. Sia per eſempio ABT un'elliſſe, l'aſſe AB $= t$, l'aſſe conjugato $= c$, l'equazione della curva di projezione ſarà

$$v^2 = \frac{-c^2 \times \overline{t \pm l} \times \pm l}{t^2 r^2} z^2 + \frac{ac^2 \times t \pm 2l}{t^2 r} z \frac{-c^2 a^2}{t^2}.$$

Onde il problema ſi riduce a trovare l'inclinazione del piano CG, nel quale la projezione ſarà un elliſſe, o un iperbola di ſpe-

cie data, prendendo $\frac{t+l}{r^2} \times l$, ovvero $\frac{AHB}{ZH^2} = \frac{b^2}{c^2} \times \frac{F}{G}$; o se la sezione dovesse essere un cerchio $\frac{AHB}{ZH^2} = \frac{t^2}{c^2}$.

Cor.3. Se il punto Z fosse dato fuori del piano verticale che passa per l'asse, dato il piano di projezione sarà data la linea dirigente HN, alla quale si faccia parallelo il diametro EF $= c$ e si dica il diametro conjugato $= t$ essendo dato l'angolo delle ordinate, si troverà la curva di projezione come sopra. Ma se fosse proposto di ritrovare la posizione del piano secante talmente che la Sezione sia data di specie; avendo condotto il diametro HBA, il rettangolo AHB deve essere a ZH^2 in ragione data. Di più tirata HN parallela alle ordinate al diametro AB, l'angolo ZHN deve essere retto: overo se la base sia una parabola l'angolo ZHN è retto, e il rettangolo fatto da HB e dal parametro del diametro sarà a HZ^2 in ragione data, la quale sarà ragione d'uguaglianza, se la Sezione cercata è un cerchio. Aggiungerò la soluzione di questo ultimo caso il quale contiene tutti gli altri più semplici, poichè colli principii precedenti una base qualunque si trasforma facilmente in parabola, e il circolo in una Sezione data di specie.

Dal

Dal punto dato Z (*fig.*45.) si abbassi nel piano della parabola la perpendicolare ZI che l'incontra nel punto I dal quale si alzi IR perpendicolare all'asse. Dal punto cercato H, se sia HB diametro della parabola che incontri la retta IR in M e la curva in B, si conduca al punto B la tangente BX e l'ordinata all'asse BL, la retta HN parallèla a BX tagli l'asse in N; finalmente condotte le rette ZH, ZN, ZR sia NK normale ad HM fatta questa costruzione, chiamato p il parametro dell'asse, sarà $p + 2LX$, ovvero $p + 2HK$ il parametro del diametro cercato HB, e BX^2 (HN^2)

$= \frac{1}{2} HK \times \overline{p + 2HK}$, ed essendo per la condizione del problema il quadrato di HZ uguale al rettangolo di HB nel parametro del diametro, si

avrà $\overline{NX + \frac{1}{2} HK} \times \overline{p + 2HK}$, cioè $\overline{RV - KM}$ $\overline{\times p + 2HK} = ZH^2 + HN^2 = ZR^2 + KM^2 = ZN^2$, essendo ZHN, ZRM angoli retti. Ma MR^2

$= HN^2 - HK^2 = \frac{1}{2} HK \times p$, e $IM = IR -$

$\sqrt{\frac{1}{2} HK \times p}$; di più $HK : MR = IM : HM$. Onde sarà $KM = HM - HK =$

$$\frac{IR \times \sqrt{\frac{1}{2} HK \times p} - \frac{1}{2} HK \times p}{HK} - HK.$$

Que-

Questo valore della retta KM si faccia uguale al valore che si ricava dall'equazione quadratica $ZR^2 + KM^2 = \overline{RV - KM} \times \overline{p + 2HK}$, e scrivendo x per l'incognita HK, ed il quadrato QQ per le quantità cognite $p \times RV + \frac{1}{2} p^2 - ZR^2$ si avrà $x^3 + \overline{p + 2RV} \times x^2 + QQ \times x - \frac{1}{2} p \times IR^2 = 0$. Ora essendo data per la costruzione dell'equazione cubica la retta $HK = 2LV$, sarà dato di posizione il diametro BH. E' data ancora per l'equazione quadratica la retta KM o NR; è dato il punto N, dal quale condotta la retta NH parallela alla tangente BX e che incontra il diametro BH in H, essa sarà la linea dirigente, e si avrà la retta ZH. Il valore negativo della retta KM supposta dall'altra parte del punto R darà un'altra linea dirigente che sodisferà al problema.

Scol. Il corollario precedente contiene il problema proposto e sciolto da Cartesio: cioè data di posizione e di grandezza qualunque Sezione conica, parabola, iperbola, o elliffe, e dato un punto fuori del piano delle medesime, ritrovare la posizione e la grandezza del cerchio che è la base del cono dalla Sezione del quale possono essere formate le dette figure. Quest'istesso problema è stato sciolto di poi da molti. Se ne legge una soluzione elegante nelle Sezioni coniche del Marchese

chese del Hopital *lib.* 10. *prop.* 10., e l'equazione alla quale è arrivato il celebre Autore è affatto l'istessa colla precedente. E' evidente che questo medesimo problema si potrebbe scogliere col mezzo delle formole analitiche del *num.* v.; poichè non dipende che dall'espressione del piano secante e dalla natura della Sezione. Si può consultare quel che ne ha scritto il dottissimo Hermanno *tom.* 6. delle memorie di Pietroburgo.

PROBL. II.

Spiegare le projezioni astronomiche.

Sia Z un punto nella superficie della sfera (*fig.* 44.) CG l'intersezione del piano verticale e d'un piano parallelo al cerchio, del quale è Z il polo. Sia BTA il cerchio del quale si cerca la projezione. La retta HZ parallela a CG cada nel piano del cerchio in H, e si conduca la tangente HT del cerchio in T. Poichè li punti Z, T sono nella superficie della sfera, le tangenti ZH, TH sono uguali, e la projezione nel piano CG, o in un'altro piano parallelo a BG sarà un cerchio. Queste sorte di projezioni sono chiamate *Stereografiche*.

Se la retta ZV che incontra il diametro BA in V, e *ba* in *u* divide in due parti uguali l'angolo BZA, la medesima retta prolungata caderà nel polo del circolo BTA; onde la sua projezione sarà il punto *u*. Si alzi nel punto V un piano parallelo al piano di projezione il quale tagli il piano verticale in VQ. Se intorno a ZV come asse imma-

maginiamo rivolgersi un piano che seca il piano dell'asse, ed il piano condotto per VQ, è evidente che gli angoli fatti dalle intersezioni colle rette VA, VQ saranno uguali; poichè li piani restano li medesimi rispettivamente all'asse di rivoluzione. Di più gli angoli nel piano VQ, sono uguali agli angoli in *ua*; onde saranno uguali agli angoli nel piano BTA, o in un altro piano qualunque parallelo al medesimo, e specialmente nel piano che tocca la sfera nel polo del circòlo BTA. Dal che si ricava che gli angoli qualunque in una superficie sferica restano li medesimi nella projezione, la quale cosa si può anche facilmente dedurre dalla projezione delle rette tangenti della sfera in un punto qualunque. Questa osservazione potrebbe essere di somma utilità nella Trigonometria sferica.

Se li punti V, *u* dividono proporzionalmente li diametri AB, *ab* la retta condotta per la projezione *u* del polo, taglia archi simili agli archi originali scambievolmente verso le parti delli punti V, *u*; per esempio, se (*fig.*46.) *ab* sia la projezione del diametro AB, e *u* la projezione del polo, si troverà la projezione *ac* dell'arco AC dividendo AC in V talmente che sia AV: BV = *bu* : *au*, e condotta la retta CV che tagli l'arco BK, l'arco simile, *ac*, sarà l'arco cercato.

Non sarà più difficile di spiegare un'altra specie di projezione chiamata *gnomonica* nella quale l'occhio si suppone nel centro della sfera. In questo caso la projezione delli cerchj massimi sono

no linee rette, delle quali quelle che rappresentano li meridiani o li cerchi orarii convergono nella projezione del polo del mondo. Il meridiano normale al piano dell'oriuolo lo taglierà nella *Sostilare*. Se nel piano del meridiano dal centro si alzi una perpendicolare all'asse, che incontrerà il piano dell'oriuolo in un punto dal quale si tiri una perpendicolare alla Sostilare, questa perpendicolare prodotta all'infinito dall'una e l'altra parte sarà la projezione del cerchio *equinoziale*. Onde presa la perpendicolare all'asse per raggio, la perpendicolare alla Sostilare rappresenterà la tangente. Perciò si potrà sempre tagliare in questa tangente un segmento proporzionale a un'arco qualunque dell'equinoziale, e si condurranno le linee orarie.

Le projezioni delli cerchj minori saranno Sezioni coniche date, purchè sia dato di posizione l'oriuolo. E' utilissima la projezione delli tropici nel disegnare gli oriuoli Babilonici e Italici, nelli quali le ore non cominciano dal meridiano, ma dall'orizonte, cioè dal nascere o tramontare del Sole, e le ore sono indicate non dall'ombra dell'asse, come negli altri oriuoli, ma dal vertice dello stile il quale si considera come centro della sfera.

Ho spiegato in questa proposizione la projezione Stereografica e gnomonica della sfera, resterebbe ora a dire qualche cosa della projezione ortografica, ma essendo facilissima basterà quel che ne è stato detto nel principio della perspettiva.

Scol.

Scol. Si capisce facilmente la teoria e la costruzione degli oriuoli Babilonici, e Italici. Immaginiamo il Sole nascere in tre punti qualunque dell'orizonte, secondo la sua diversa *amplitudine ortiva*. Si concepisca di poi il Sole alzato sull'orizonte, e sia il centro del Sole in tre altri punti corrispondenti: quali essendo trasportati per il moto diurno, è evidente che saranno nel medesimo cerchio massimo della sfera, del quale la projezione gnomonica sarà una linea retta che si chiamerà *oraria*, poichè per mezzo di essa si avrà il tempo dal nascere o tramontare del Sole. Dunque in queste sorte di oriuoli si deve trovare la projezione del polo, dell'equinoziale, dell'orizonte, e del tropico. Si segni il punto, in cui il tropico taglia l'orizonte verso *l'occaso* nell'oriuolo Babilonico, e verso *l'orto* nell'Italico; questi punti saranno la projezione del centro del Sole oriente o occidente nelli Solstitii, dalli quali punti si conteranno le ore. Si trovi la projezione del meridiano che passa per l'intersezione del tropico, e dell'orizonte, e si noti il punto in cui la detta projezione incontra l'equinoziale. Da questo punto si taglino li segmenti dell'equinoziale corrispondenti a tutte le ore. Per le estremità o li termini di questi segmenti si conducano dal polo delle rette le quali tutte incontreranno il tropico; onde si avranno due punti delle medesime. Dal punto in cui l'equinoziale e l'orizonte si intersecano, si taglino verso l'istessa parte i segmenti orarii, li termini delli quali si unifcano colli punti ora-

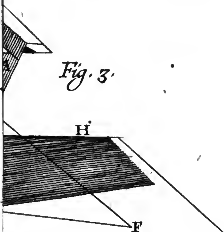
orarii già ritrovati, alzato lo ſtile, e ſcancellate le linee inutili, ſarà compito l'oriuolo. Si ſuole adoperare la projezione del tropico, perchè in eſſo ſi terminano le linee orarie. Queſto ſcolio diventerà più chiaro conſultando in qualche libro di Gnomonica la figura d'un oriuolo Italico o Babilonico.

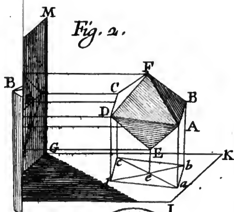
Dalli medeſimi principii ſi potrebbe ricavare la coſtruzione delle carte idrografiche, le quali dipendono dalla projezione d'un Sferoide, e conſiderando lo Sferoide compreſſo verſo li poli o verſo l'equatore ſi determinerebbero le differenze nell'una o l'altra ipoteſi. Ma ſi vedano le tavole Loxodromiche del Sig. Murdok. Finirò queſto libro coll'oſſervare che il metodo delle projezioni può eſſere utiliſſimo nelli calcoli più ſublimi; la projezione delle curve e delle ſuperficie curvilinee produce ſpeſſe volte delle facilità ſorprendenti nelle loro quadrature. Ma queſta materia richiede un trattato a parte che io ſpero di dare alla luce.

IL FINE.



Tab. I.



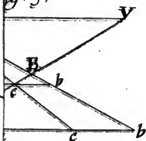


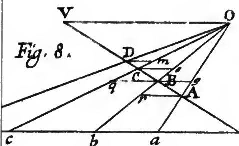
Gaetano





Tab. II


Fig. 7.
V
B
b
c
c
b


V
O
Fig. 8.
D
m
C
B
A
q
p
c
b
a

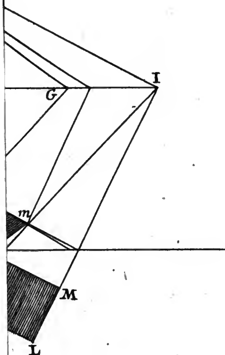

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE III
NAPOLI

Tab. III.

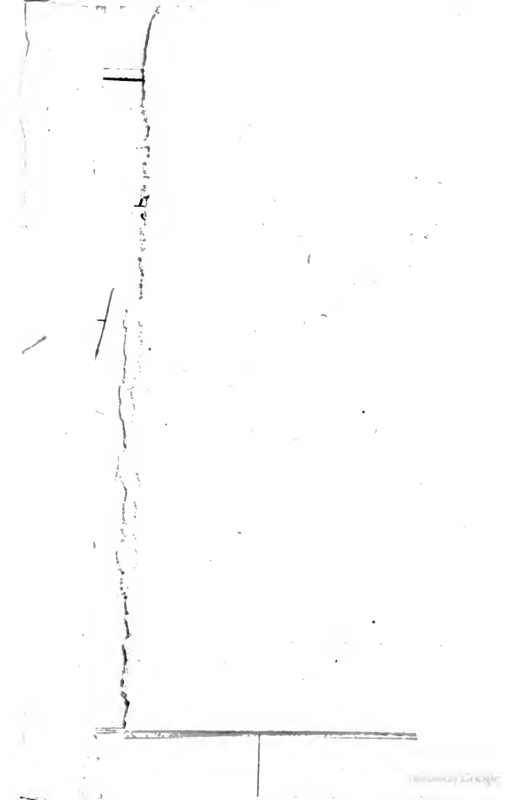
K

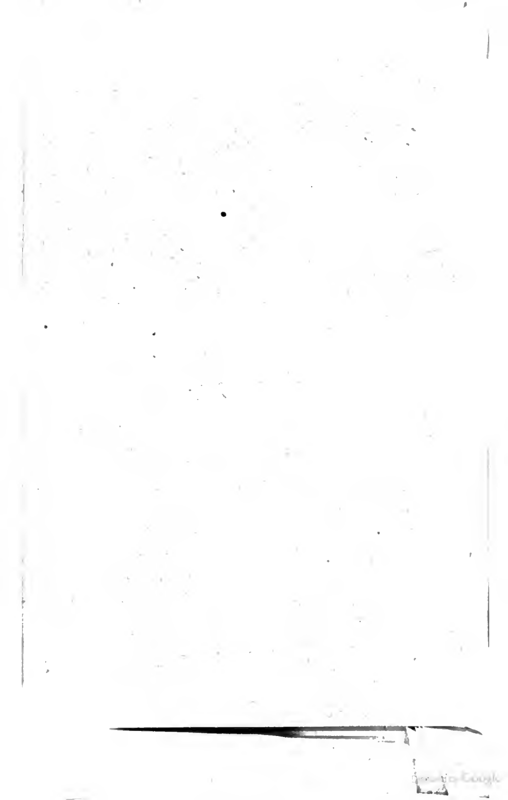


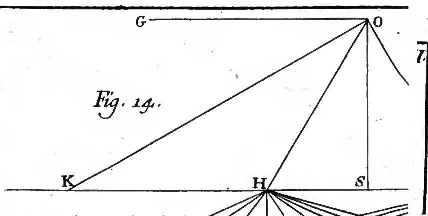
Tab.II

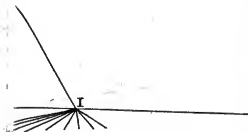


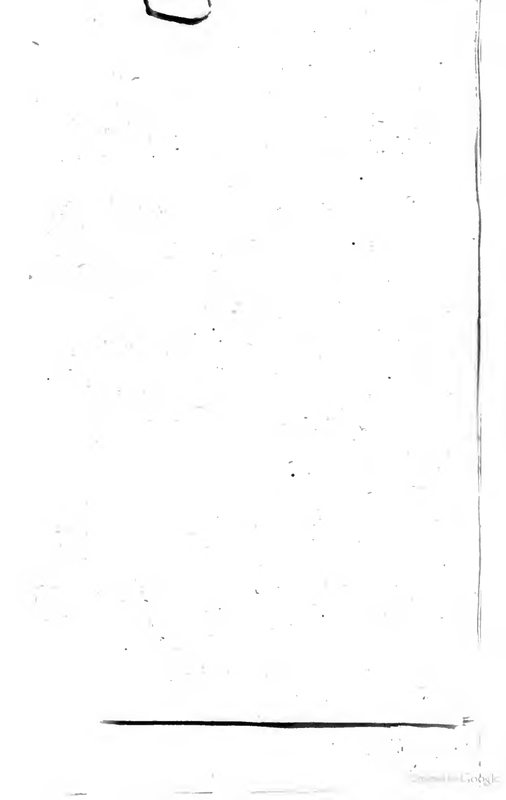
G.d



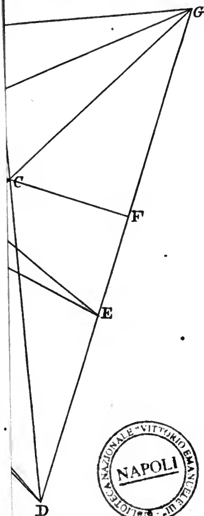



G
O
Fig. 14.
K
H
S

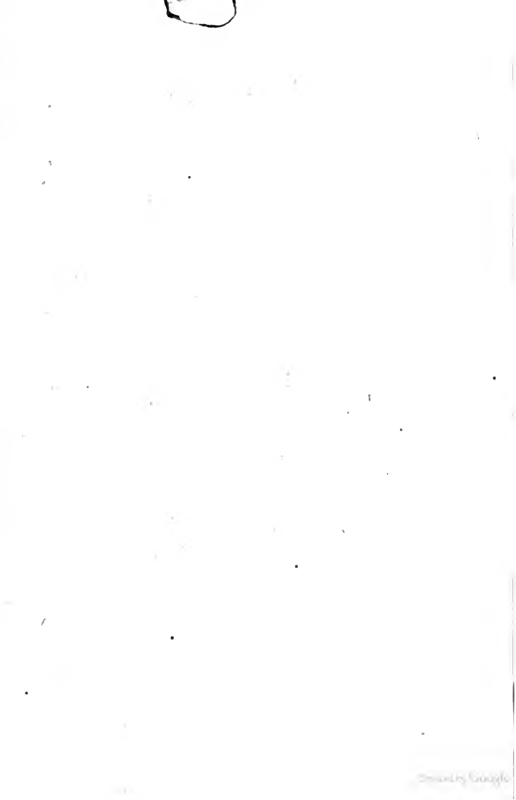

Tav. VI
I



Tav. VII.







Tav. IX.

F G ʃ

k a b K V

c

u

S r

v

l q

K

k p K H

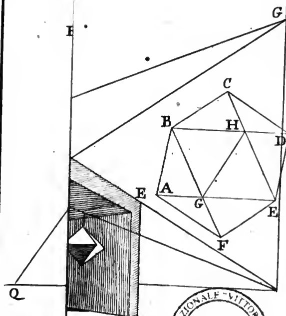
S

I

G. de Rossi sc.



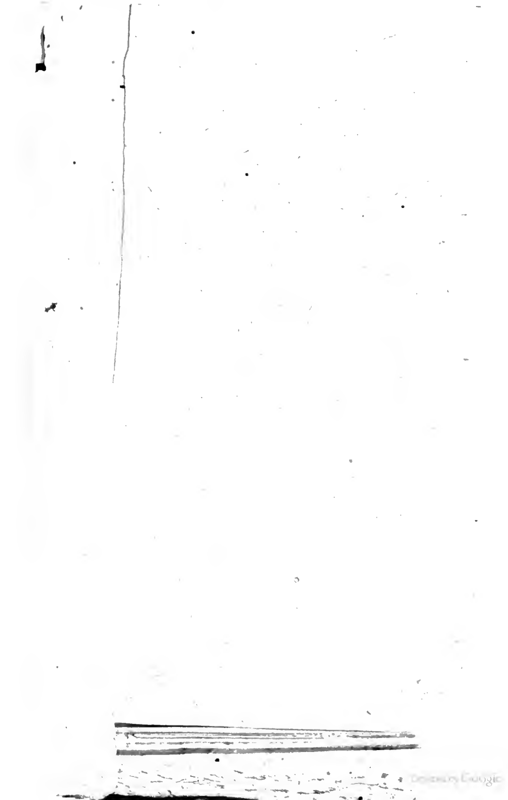
Tav. X.







G. de Rossi

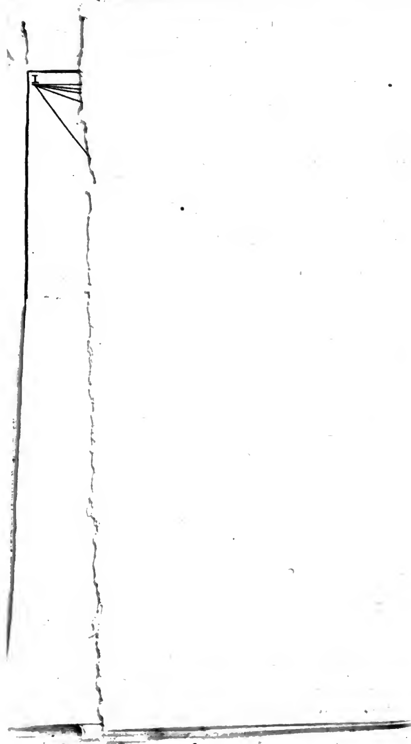


Tav. XII.



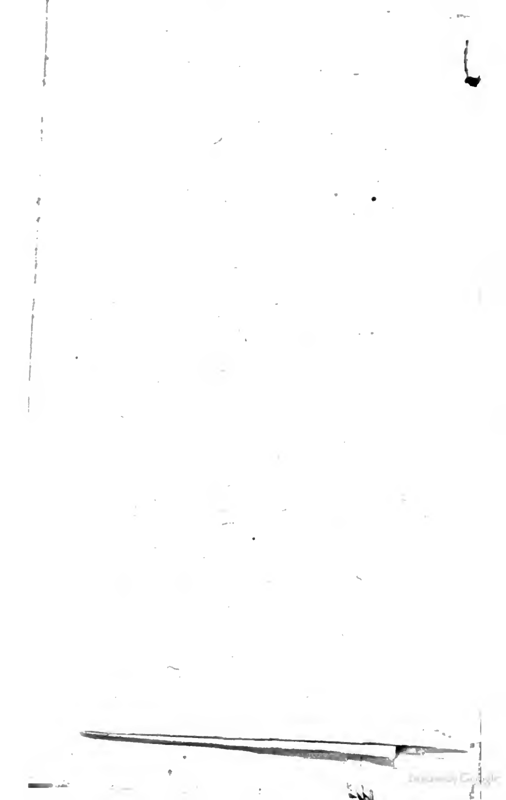


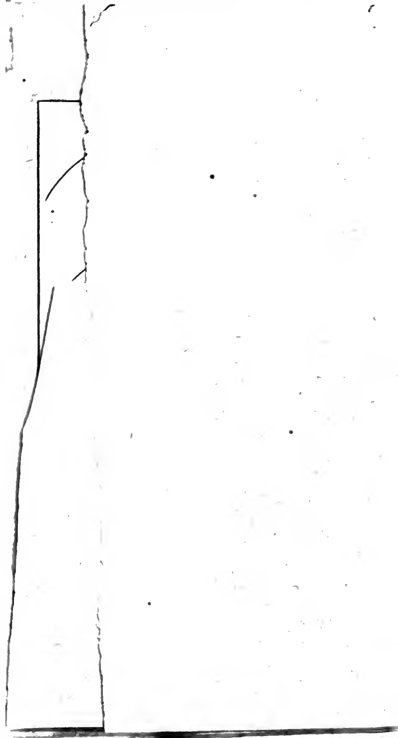
Tav. XIII.

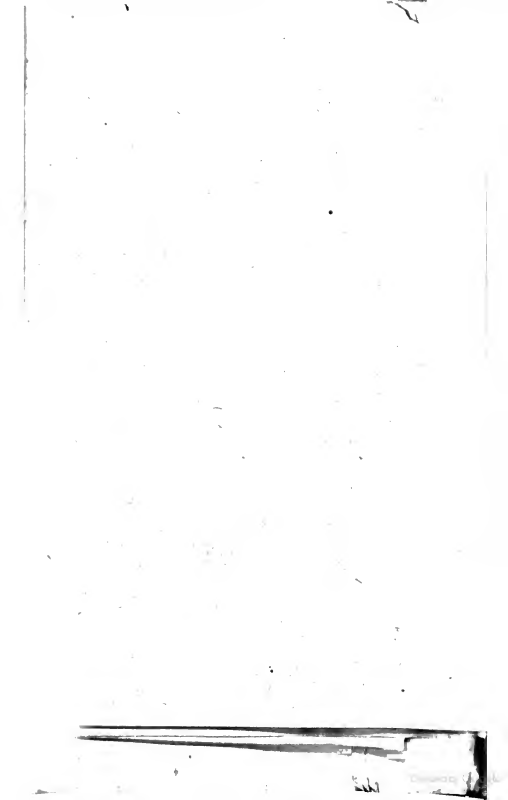












Q

A

P T

